3. (к § 5) Решения уравнений Максвелла для зарядов, движущихся со скоростью света. W. B. Bonnor, "Solutions of Maxwell's equations for charges, moving with the speed of light" Int. J. Theor. Phys. 2, № 4, 1969.

РЕЗЮМЕ

Показано, что уравнения Максвелла разрешают решения для зарядов, движущихся со скоростью света. Решения глобально регулярны, но если заряды только одного знака, полная энергия равна бесконечности. Тем не менее, если имеются равные количества положительных и отрицательных зарядов, полная энергия может быть конечной и такие решения, кажется, не вызывают возражений с физической точки зрения.

I. ВВЕДЕНИЕ

Решения уравнений Максвелла для плоской волны свободны от источников и физически это означает, что источники оказываются на бесконечности. Обобщение плоских волн приводит к классу волн, фронты которого плоские, но амплитуды изменяются от фронта к фронту: такие волны иногда называют плоско-фронтальными волнами (Кундт 1961).

Среди плоско-фронтальных волн имеется большой подкласс волн, которые имеют источники в конечной части пространства времени, такие волны исследуются здесь. Источники, указанные в разделе 2, имеют заряды, движущиеся со скоростью света."c"

Можно построить модель для заряженной частицы, движущейся со скоростью " " (Раздел 3), но это ни физично, так как её полная энергия бесконечна. Если, тем не менее, мы возьмём дипольную частицу, её полная энергия может быть конечна, как показано в разделе 4. Возникают ли поля из чисто запаздывающих вкладов источников, не очевидно и это исследуется в Дополнении. Только одной относящейся к делу ранней работой, которой я был в состоянии воспользоваться, была работа Батмана (1915), который изучал поля сингулярностей, движущихся со скоростью "c", со скорее общей точки зрения, но без рассмотрения природы источника или энергии поля и некоторые короткие замечания Зоммерфельда (1905).

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Я использовал повсюду метрику СТО:

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2 \tag{2.1}$$

выбирая нерационализированные Гауссовые единицы, но с единицей времени, выбранной так, что скорость света c есть 1 (единица). Координаты нумеруются так:

$$x^1 \equiv x, \quad x^2 \equiv y, \quad x^3 \equiv z, \quad x^4 \equiv t.$$

Поле будет генерироваться векторным потенциалом: $A^i = (0, 0, \phi, \phi)$ или $A_i = (0, 0, \phi, \phi)$ (2.2)

где ϕ есть функция класса дифференцируемости C^1 и кусочности C^2 в каждом замкнутом интервале x^i. Это обеспечивает непрерывность поля F_n и устраняет поверхностные заряды и поверхностные токи. Функция ϕ будет задана в форме:

$$\phi = \phi(x, y, u) \; ; \quad u \stackrel{def}{=} t - z \tag{2.3}$$

(2.3)

и F_{ik} задаётся следующим образом:

$$F_{ik} = A_{i,k} - A_{k,i}. \tag{2.4}$$

(Запятая означает частное дифференцирование), тогда получаем:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \phi_x & -\phi_x \\ 0 & 0 & \phi_y & -\phi_y \\ -\phi_x & -\phi_y & 0 & 0 \\ \phi_x & \phi_y & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где нижние индексы x или y означают $\frac{\partial}{\partial x}$ или $\frac{\partial}{\partial y}$;

Четыре - ток

$$J^i = (4\pi)^{-1} F^{ik}{}_{,k} \tag{2.6}$$

имеет компоненты $J^i = (0, 0, \rho, \rho)$, (2.7)

где $4\pi\rho = -\nabla^2\phi \equiv -(\phi_{xx} + \phi_{yy})$, (2.8)

так что в пустом пространстве, где $J^i = 0$, ϕ удовлетворяет уравнению:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \tag{2.9}$$

Электромагнитное поле (2.5) есть нуль, иными словами оно удовлетворяет уравнениям:

$$F_{ik}F^{ik} = 0 \quad \text{и} \quad \eta^{ijkm} F_{ij} F_{km} = 0 \tag{2.10}$$

Это поле часто называют плоско-фронтальной волной, так как волновые фронты есть просто $z - t = const$.

Плоская волна есть особый случай плоско-фронтальной волны, для которой F_{ik} есть постоянная на волновом фронте.

Тензор энергии, который в соответствии с (2.10) сводится к:

$$E^i_k = -F^{ia}F_{ka} \tag{2.11}$$

имеет следующие отличные от нуля компоненты:

$$-E_3{}^3 = -E_3{}^4 = E_4{}^4 = \phi_x^2 + \phi_y^2 \overset{def}{=} W \tag{2.12}$$

Фиксируем внимание на особой Лоренцовской системе координат $\mathcal{S}$ и предположим, что в мировой точке Р-источник состоит из идентичных зарядов "e ".

Тогда:

$J^4 = e$ * число зарядов на единицу объёма в $\mathcal{S}$ (знак умножения, прим. переводчика);

$J^3 = e$ – число зарядов, пересекающих единицу площади в единицу времени в $\mathcal{S}$, и равным образом равенство $J^3 = J^4$ в (2.7) предполагает, что заряды движутся с единичной скоростью. Следовательно, источники состоят из зарядов плотностью ρ , движущихся со скоростью света. Это не удивительно, так как J^i есть нуль вектор, то есть: $J^i J_i = 0$. Тем не менее, предположение, что в каждой точке P присутствует заряд только одного знака существенно.ж) Несмотря на это, ρ можно предполагать имеющим различные знаки в различных мировых точках. Исключая

ж) Это удовлетворительно описывает, для примера поток электронов. Тем не менее, не описывает состояние внутри проводника, где в каждой малой области существуют положительные и отрицательные заряды, движущиеся с разными скоростями. В последней ситуации обращение в ноль J^1 может не значить, что заряды движутся со скоростью "c ".

решения, зависящие только от "u", каждое решение уравнения Лапласа (2.9) должно быть единственным.

Я теперь покажу как особенность в конечной области плоскости x, y может быть заменена областью, в которой течёт ток, и в которой F_{ik} непрерывны. Предположим, что ϕ есть функция [например, $\phi = x(x^2+y^2)^{-1} \exp(-\frac{1}{2}u^2)$], особенности которой лежат только на 2-поверхности в пространстве-времени Минковского $\mathcal{S}$:

$$x=0\,,\ y=0 \tag{2.13}$$

Для получения глобально регулярного поля мы окружим 3-поверхностью Σ:
$$x^2+y^2=a^2 \tag{2.14}$$

где a - положительная константа, и заменим ϕ некоторой функцией ϕ^* класса C^2 внутри и на Σ, то есть в

$$\mathcal{D}: \{(x,y,z,t) : (x^2+y^2) \le a^2\} \tag{2.15}$$

Итак мы требуем, чтобы:

$$\phi^* = \phi\ ; \quad \frac{\partial \phi^*}{\partial x^i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \ \text{на}\ \Sigma. \tag{2.16}$$

Совершенно очевидно, что функция ϕ^*, удовлетворяющая (2.16), всегда существует и это будет предполагаться в будущем.

[Доказательство может быть дано как в работе Боннара (1969)] ϕ^* не будет удовлетворять (2.9) на всём протяжении $\mathcal{D}$; где это не выполняется; J^i даётся (2.7). Таким образом, мы можем построить полностью регулярное электромагнитное поле, соответствующее зарядам, движущимся со скоростью "c" в пределах $\mathcal{D}$ и снаружи, в пустом пространстве.

3. МОДЕЛЬ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ СО СКОРОСТЬЮ "c"

Как пример, рассмотрим потенциал

$$\phi = \psi(u)\left(2\log\frac{r}{a}+1\right), \qquad r \geq a, \tag{3.1}$$

$$\phi = \psi(u)\frac{r^2}{a^2}, \qquad r \leq a, \tag{3.2}$$

где: $r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ и $\psi(u)$ есть класса C^2. Тогда ϕ есть класса C^1 вблизи $r = a$ и класса C^2 в каком-либо замкнутом интервале r, не содержащим $r = a$, и хотя ϕ стремится к нулю, и (3.1) и (3.2) физически приемлимые решения, четыре-вектор тока есть:

$$J^i = 0 \qquad r > a, \tag{3.3}$$

$$J^i = -(\pi a^2)^{-1}\psi(0,0,1,1) \qquad r < a. \tag{3.4}$$

Если $\psi(u) = Const$, источник есть постоянный пучок зарядов, движущихся со скоростью "c".

Поле, заданное (2.5), есть электрическое поле линейного заряда, совместно с магнитным полем постоянного прямого тока. Заряды пучка не взаимодействуют, так как силовой член $F_{ik}J_k$ стремится к нулю. Следовательно, пучок может сохраняться без неэлектромагнитных сил. Это применимо также к другим решениям разделов 3 и 4. Теперь предположим, что $\psi(u)$ есть гладкая функция с формой одиночного импульса [т.е. $\psi = \exp(-\frac{1}{2}u^2)$, удовлетворяющая неравенству

$$\psi \leq O(u^{-(1+\varepsilon)}), \text{ когда } |u| \to \infty, \quad \varepsilon > 0 \tag{3.5}$$

так что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\psi(u)\,du$ существует.

Тогда источник есть импульс заряда, движущегося со скоростью "c" вдоль оси z. Это может быть принято, как модель заряженной частицы. Пусть "O" совпадает с положением наблюдателя в $P(x_0, y_0, z_0)$: согласно (3.I), (3.2) и (2.5) "O" находится так, что наибольшие величины F^{ik} оказываются в максимуме ψ, то есть как раз в момент, когда наиболее широкая часть импульса проходит P при его движении вдоль оси z. Когда импульс становится резче и резче, в "O" проявляется действие электромагнитного поля всё более короткое время; но (если P вне импульса) O находится через это короткоживущее электрическое поле бесконечного линейного заряда и магнитное поле бесконечного прямого тока.

Это поведение казалось мне таким замечательным, что я решил посмотреть, может ли векторный потенциал (3.I) быть построен из тока (3.4) с помощью одних запаздывающих потенциалов. Кажется вполне возможным к внешней стороне, которая одна должна быть необходима, добавить вклад от опережающего потенциала или волновую функцию без особенностей, или то и другое. Действительно, как показано в приложении, (3.I) может быть прострoен с помощью одного запаздывающего потенциала, за исключением функции $t-z$, которая не важна, так как она стремится к нулю, если выражать поле посредством (2.4). Можно взять вместо (2.3):

$$\phi = \phi(x, y, r)\,; \quad v \overset{def}{=} t+z \,, \tag{3.6}$$

В этом случае, однако, найдём, что поле возникает из чисто опережающего потенциала. Поскольку (3.6) возникает из (2.3) просто изменением на обратное направление оси z, это кажется скорее странным. Поскольку (3.6) также получается из

(2.3) изменением знака t, то с этой точки зрения переход от запаздывающего к опережающему потенциалу является естественным. Тем не менее предполагают, что для полей, подобных этим, различие между опережающим и запаздывающим потенциалом не имеет большого значения.

Мгновенная величина относительной энергии W внешнего поля (3.I) получается из (2.I2):

$$W_{ext} = 4 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} r^{-1} [\psi(t-z)]^2 \, dr \, d\theta \, dz \qquad (3.7)$$

которая расходится. Мы пришли к выводу, что импульс (как он бы ни был коротким) заряда одного знака, движущегося со скоростью " c " есть нефизичный согласно теории Максвелла. Как будет показано в ближайшем разделе, этот вывод неприемлимый, если присутствуют заряды обоих знаков.

4. ДИПОЛЬНАЯ ЧАСТИЦА, ДВИЖУЩАЯСЯ СО СКОРОСТЬЮ " c "

Рассмотрим потенциал:

$$\phi = \psi(u)\, r^{-1} \cos\theta \qquad r \geq a \qquad (4.I)$$

$$\phi = \psi(u)\, a^{-1} \cos\theta \left[-3\left(\frac{r}{a}\right)^3 + 4\left(\frac{r}{a}\right)^2\right], \quad r \leq a \qquad (4.2)$$

где: $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$ и $\psi(u)$ есть импульсная функция, как описано в разделе 3, ϕ есть класса C^1 при $r = a$ и класса C^2 в других местах. Для $r > a$, $J^1 = 0$ и

$$J^1 = \frac{3\psi\cos\theta}{\pi a^3}\left(\frac{2r}{a} - 1\right)(0,0,1,1), \quad r < a. \qquad (4.3)$$

Мы можем взять это, как модель частицы, содержащей заряды обоих знаков. Полный заряд, то есть $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{a} \rho r\,dr\,d\theta\,dz$ стремится к нулю, но частица имеет дипольный момент. Полная электромагнитная энергия есть, из (2.12):

$$W_{полн.} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 r\,dr\,d\theta\,dz$$

конечна. Поскольку все величины, связанные с частицей, ведут себя прилично, это означает, что теория Максвелла разрешает дипольные частицы, движущиеся со скоростью света "c".

ГЛАВНЫЕ ВЫВОДЫ

I) Глобально регулярные решения уравнений Максвелла существуют для заряда, движущегося со скоростью света. Однако, если суммарный заряд не есть ноль, полная энергия бесконечна. Если суммарный заряд есть ноль, полная энергия может быть конечной, и такие решения, кажется, физически приемлемы.

2) Эти движущиеся заряды генерируют плоско-фронтальные волны.

3) Грубо говоря, частица с суммарным зарядом, движущимся со скоростью "c", образует (в окрестности точки P) поле статического бесконечного линейного заряда и постоянного прямого тока, но только тогда, когда она проходит мимо точки P на кратчайшем расстоянии.

Приложение: Построение решения (3.I) с помощью запаздывающих потенциалов. Из (2.3) и (2.9) ясно, что ϕ удовлетворяет уравнению Даламбера:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=4\pi\rho \qquad (A.I)$$

и, как известно, (Ферраро 1962) каждое решение этого уравнения может быть записано:

$$\phi(x,y,z,t)=\int\limits_V\frac{[\rho]}{R}\,dV+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathcal{S}}\left\{\frac{1}{R}\left[\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]-\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)[\phi]+\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial n}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]\right\}dS \qquad (A.2)$$

где $\mathcal{S}$ есть поверхность, замыкающая объём V, $\frac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по внешней нормали к $\mathcal{S}$, R - есть расстояние от точки - источника до точки поля (x, y, z, t) и $[\cdots]$ означает величину ... во время $t-R$, первый интеграл означает запаздывающий вклад от той части источника, которая лежит внутри $\mathcal{S}$ и второй соответствует полям, не имеющим источников внутри $\mathcal{S}$. Вклад от опережающих потенциалов, если ϕ вообще делится, может быть включён в поверхностный интеграл; но последний может точно также включать другие вклады, а именно от источников, находящихся вне , и от полей свободных источников, таких как плоские волны. Задача будет ясней, если за $\mathcal{S}$ выбрана бесконечна сфера с центром в источнике. Если ϕ задано (3.I), возникает только объёмный интеграл, иначе поверхностный интеграл также необходим. Для упрощения я не будут использовать внутреннего решения (3.2), но вместо этого я будут рассматривать источник линейный с плотностью ρ, равной:

$$\rho = -\psi(u)\,\delta(x)\,\delta(y) \tag{A.3}$$

в соответствии с (3.4).

Пусть[ж)]

$$I(x,y,z,t) \int_V \frac{[\rho]}{R}\,dV = \tag{A.4}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(t-R-\xi)}{R}\,d\xi$$

где $R = +[x^2+y^2+z^2-\xi^2]^{1/2}$ (A.5)

Мы хотим найти разницу между I и ϕ данного (3.1). Интегрируя (A.4) по частям, мы имеем:

$$I = -\psi(t-R-\xi)\,\log(R-z+\xi)\Big|_{-\infty}^{\infty} -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} R^{-1}(R-z+\xi)\log(R-z+\xi)\,\psi'(t-R-\xi)\,d\xi \tag{A.6}$$

и, подставляя пределы, мы имеем

$$I = J = 2\psi(t-z)\log r + c\psi(t-z) - J \tag{A.7}$$

где J есть интеграл в (A.6) и C - бесконечная константа.[жж)] Мы предположили, что $\psi(u)$ удовлетворяет очень мягкому условию:

$$\mathcal{L}t_{u\to\infty}\,\psi(-u)\log u = 0,$$

ж) Примечание переводчика: следует различать I и J.

жж) Эта бесконечная константа интегрирования возникает тем же самым способом, как и константа, полученная посредством вычисления потенциала бесконечного постоянного линейного заряда. Но это не есть причина для тревоги, так как она исчезает, когда конструируется поле по (2.4).

которое должно быть удовлетворено как следствие (3.5). Мы теперь исследуем $\mathcal{J}$. Если мы продифференцируем его, проинтегрируем по частям, где это необходимо, мы получим, используя (3.5):

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r} = 0, \quad -\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}$$

отсюда следует, что $\mathcal{J}$ есть функция только $t-z$. Сравнивая (А.7) и (3.1), мы найдём, что как I, так и ϕ имеют форму:

$2\psi(u)\log r$ + фнукция ($t-z$).

Когда мы образуем F_{ik} по (2.4), то функции ($t-z$) не имеют значения, поэтому мы заключаем, что внешнее поле Раздела 3 возникает из запаздывающего потенциала распределения заряда (3.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bateman (1915). Математический анализ волнового движения с электрической и оптической точки зрения. Часть УШ. Кембридж.
2. Bonnor W. B. (1969) Comm. Math. Phys. т.13, 163.
3. Ferraro V. C. A. (1962) "Electromagnetic theory" p. 527, Athlone Press, London.
4. Kundt W. (1961), Zs. für Physik, 163, 77.
5. Зоммерфельд. А. (1905) Gesell. Wiss. Gottingen Nachr. Math. Phys. Klasse, 229

4. (к § 6) Модели скрытых переменных в квантовой механике.
Gudder S., "Hidden-variable models for quantum mechanics", Nuovo Cimento 1872, 1310, № 2, 518-522.

РЕЗЮМЕ

В этой статье дана модель скрытых переменных в квантовой механике. Эта модель есть по существу квантовая логика, связанная со строго определённым по порядку множеством свободных от дисперсии состояний. Доказана характерная теорема, которая показывает, что эта модель изоморфна в классе подмножеств фазового пространства. Показано, что пример скрытых переменных Охса есть особый случай общей модели и сделаны некоторые комментарии о статье Охса по скрытым переменным.

ВВЕДЕНИЕ

В последней статье (I) Охс обсуждал некоторые теоремы, обязанные своим существованием автору данной статьи, которые связаны со скрытыми переменными в квантовой механике. Он утверждает, что одна из этих теорем некорректна. В этой статье мы подчёркиваем, что вывод, касающийся некорректности теоремы, происходит от недоразумения (за которое автор несёт ответственность). Мы покажем далее, что пример скрытых переменных Охса есть особый случай общей модели скрытых переменных и докажем репрезентативную теорему для таких моделей.

2. СТАТЬЯ О СКРЫТЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ОХСА

Для сохранения последовательности изложения мы используем определения и положения, упомянутые в статье Охса, и отошлём читателя к этой статье для получения справоки об относящейся к делу терминологии. Охс ссылается на две статьи автора.(3) Он называет главным результатом в первой статье слабую теорему и главным результатом второй статьи сильную теорему. Однако, дело в том, что это не две теоремы, а одна.

Первая статья была строго математическая и не ключала физической интерпретации. Вторая (письмо в издательство) не являлась полностью строгой, но скорее представляла собой обзор математического результата для физиков. Свобода, с которой было написано это письмо, привела к настоящему недоразумению. Автор рассчитывал на то, что $a \wedge b$ будет отождествлено с $\inf (ab)$, и ($\varphi 5$) означало по существу только определение $a \wedge b$. Тем не менее, Охс и другие делают вывод (и автор полностью ответственен за это), что $a \wedge b$ было ограничением $\inf_{\leq} (a, b)$, так что $a \wedge b$ не может существовать, даже если $\inf_{\leq} (a, b)$ существует.

По мнению автора, в модели скрытых переменных $\inf_{\leq} (a, b)$ должен существовать математически только в том случае, если он поддаётся физической интерпретации как экспериментальный вопрос. Это требование должно, по всей вероятности, исключить формализм Гильбертова пространства (с его обычными интерпретациями) как модель скрытых переменных.

В разделе 3 своей статьи Охс даёт контрпример для "сильной теоремы". Мы должны подчеркнуть, что существуют более простые контрпримеры. Пусть Ω есть множество $\{$ I, 2, 3, 4$\}$ и пусть Q есть собрание подмножеств Ω с точно таким же числом элементов (включая ϕ). Мы определим $\square = \phi$, $| = \Omega$ и для a, $b \in Q$ мы определим a $\leq$ b, если a$\subseteq$ b. Тогда ясно, что Q удовлетворяет (Q I) - (Q4). Мы определим две функции $\wedge$ и $\vee$ с областями определения:

$$[\wedge] = \{\{a_i : i \in J\} \subseteq Q : \bigcap a_i \subseteq Q\},$$

$$[\vee] = \{\{a_i : i \in J\} \subseteq Q : \bigcup a_i \in Q\}$$

Поскольку $[\wedge] \subseteq [\inf]$ и $[\vee] \subseteq [\sup]$, мы можем определить: $\wedge = \inf|_{[\wedge]}$ и $\vee = \sup|_{[\vee]}$, и эти функции уже удовлетворяют (Q 5).

Теперь, если $a \in Q$, a' определяется как обычное множественно-теоретическое дополнение a. Легко показать, что a $\longleftrightarrow$ b, тогда и только тогда, когда $a \cap b \subset Q$, для $a, b \in Q$. Это значит, что центр Q есть $\{|, \square\}$ и что (Q 9) сохраняется. Итак, если (Q I0) выполнено, то Q есть исследуемая система. Для i = I, 2, 3, 4 определим функции m от Q в реальном единичном интервале [0,I] как $m_i(a)$ = I, если $i \in a$, $m_i(a)$= = 0, если $i \notin a$ для всех $a \in Q$, тогда m_i удовлетворяют (M I) - (M 6) i = I, 2, 3, 4. Это и есть состояния, свободные от дисперсии. Допустим, что M есть множество смешанных m_i, тогда следует, что (Q, M) есть квантовая система с разрешенными скрытыми переменными. Тем не менее, Q не имеет атома в своём центре и несомненно не есть алгебра Буля.

В следующем разделе мы дадим сходный, но более сложный, пример, который имеет физическое значение, и покажем, что каждая квантовая система, в которой допустимы скрытые переменные в вышеупомянутом смысле, изоморфна одному из этих типов.

3. МОДЕЛИ СКРЫТЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим квантово-механическую частицу, вынужденно двигающуюся вдоль координатной оси. Пусть Эвклидова плоскость R^2 представляет собой двухразмерное фазовое пространство для этой частицы и предположим (это нижеследующее условие не есть необходимое, но важное для упрощения), что ячейка фазового пространства этой частицы есть прямоугольный участок $\Omega \subset R^2$ с площадью $\frac{N\hbar}{2}$, где N есть большое целое число. Следовательно, точки в Ω не имеют значения для квантово-механического описания частицы. Тем не менее, ячейки фазового пространства с площадями (более строго переменные Лебега) $\frac{n\hbar}{2}$, $n = 0, I, 2, \ldots N$, имеют значение.

Таким образом, мы стали на точку зрения, что частица может в принципе быть локализована на площади, которая с точностью до множителя есть элементарная единица действия $\frac{\hbar}{2}$. Допустим, что Q есть класс всех (измеряемых) подмножеств Ω с площадями $\frac{n\hbar}{2}$, $n = 0, I, 2, \ldots N$. Если $a, b \in Q$

определяет $a \leq b$ всякий раз, когда $a \subseteq b$, и определяет a', как обычное множественно-теоретическое дополнение a, тогда Q удовлетворяет (Q_1) - (Q_4) и (Q6) - - (Q 8) и есть тогда ортодополнительное промножество. Кроме того, Q удовлетворяет (Q IO) и (Q 9), если $a \perp b$; тогда $a \vee b \in Q$.

Тогда Q есть ортомодульное промножество. Если $\omega \in \Omega$ определяет $m_\omega : Q \to [0,1]$ посредством $m_\omega(a) = 1$, если $\omega \in a$ и $m_\omega(a) = 0$, если $\omega \in a$, тогда $M = \{m_\omega : \omega \in \Omega)$ есть класс свободных от дисперсии состояний Q.

Кроме того, M строго определено по порядку в том смысле, что если $\{m_\omega : m_\omega(a) = 1\} \subseteq \{m_\omega : m_\omega(b) = 1\}$ тогда $a < b$. Это последнее условие строже, чем Аксиома (M4). Этот пример есть особый случай общей модели скрытых переменных, который включает пример Охса в разделе 3 этой статьи. Мы теперь вернёмся к общей модели скрытых переменных. Допустим, что Ω есть непустое множество. Класс C подмножеств Ω называется σ_0 классом, если C удовлетворяет следующим условиям:

(C I) $\phi \in C$

(C 2) если $A \in C$, тогда A' (множественно-теоретическое дополнение A) $\in C$

(C 3) если $A, B \in C$ и $A \cap B = \phi$, тогда $A \cup B \in C$.

Легко проверить, также как в примере в начале этого раздела, что формы σ_0 класса - ортомодульное промножество со строго по порядку определённым множеством свободных от дисперсии состояний. Интересен факт, что произвольное ортомодульное промножество со строго по порядку определённым множеством свободных от дисперсии состояний может быть представлено σ_0 классом.

Теорема: Ортомодульное промножество со строго по порядку определённым множеством свободных от дисперсии состояний изоморфно по отношению к σ_0 классу подмножеств .

Проверка: Путь h есть таблица от P до набора подмножеств M , определённых как $h(a) = \{m \in M ; m(a) = 1\}$ и допустим, что "c" есть ранг "h", т.е. $C = \{h(a) : a \in P\}$ Мы сначала покажем, что C есть σ_0 класс. Если теперь $M = h(1)$ и $\phi = h(\square)$, то $M, \phi \in C$. Для $h(a) \in C$ мы имеем $h(a)' = h(a') \in C$. Итак, если $h(a) \cap h(b) = \phi$, мы имеем $h(a) \cup h(b) = h(a \vee b) \in C$. Мы теперь покажем, что h есть изоморфизм, то есть что $h : P \to C$ есть само по себе сохранение $'$ и сохранение $\leq$ обоих путей. Мы уже показали, что h сохраняет $'$. Если $a < b$, тогда если $m(a) = \text{I}$, мы должны иметь: $m(b) = \text{I}$, то $h(a) \leq h(b)$. Если $h(a) \leq h(b)$, тогда $\{m \in M : m(a) = 1\} \subseteq \{m \in M : m(b) = 1\}$ и поскольку M есть строго по порядку определённое $a \leq b$.

Чтобы показать, что h есть единственное, предположим $a \neq b$. Поскольку M есть строго определённое по порядку, имеется $m \in M$ такое, что или $m(a) = \text{I}$ и $m(b) = 0$, или $m(a) = 0$ и $m(b) = \text{I}$, то $h(a) \neq h(b)$.

Заметим, что теорема, обратная вышеупомянутой, также выполняется. Так, если ортомодульное промножество P изоморфно в σ_0- классе, тогда P имеет строго определённое по порядку множество состояний, свободных от дисперсии. В частности, множество ортогональных проекций в отдельном пространстве Гильберта с размерностью больше, чем 2, не может быть изоморфным в σ_0- классе. Вышеупомянутая работа может быть легко распространена на поддающуюся подсчёту дополнительную ситуацию. Тогда мы можем определить σ-класс(4), который должен быть σ_0- классом, замкнутым среди поддающихся подсчёту расчленённых соединений, σ- ортомодульные промножества должны быть ортомодульными промножествами, замкнутыми среди поддающихся подсчёту, разделёнными максимумами и σ- состояниями, которые должны быть поддающимися подсчёту, аддитивными в разделенных переменных. В этом случае наша теорема может быть сформулирована следующим образом: σ- ортомодульное промножество есть σ- изоморфно в σ- классе, тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{M}$ свободных от дисперсии σ- состояний в P есть строго определённое по порядку. Отсюда следует вывод, что если исследуемая система разрешает строго определённое по порядку множество свободных от дисперсии состояний $\mathcal{M}$, то оно изоморфно к классу подмножеств некоторого фазового пространства, точки которого есть точные состояния в $\mathcal{M}$. Мы можем тогда рассматривать такие исследуемые системы, как модель теории скрытых переменных, и представленная выше теорема даст внедрение таких систем в детерминистскую механическую модель. Заметим, что мы не утратили принцип неопределённости в таких исследуемых системах, и их небулевский квантовый характер нами не забыт, поскольку может быть много недоумённых вопросов: в действительности примеры в начале этого раздела и в центре предыдущего тривиальны.

Теперь покажем, что пример Охса попадает в вышеупомянутую схему. Охс показал, что его исследуемая система есть ортомодульное промножество. Тогда всё, что нам необходимо показать то, что Q позволяет строго определённое по порядку множество состояний, свободных от дисперсии. Пусть $\mathcal{N} = \{f_x : x \in \Omega\}$ есть множество свободных от дисперсии состояний в Q, определённых Охсом. Пусть (P,α) и $(Q,\beta) \in Q_0$ как определено Охсом, и предположим, что $\{f_x : f_x(P_\alpha) = 1\}$; $\{f_x : f_x(Q_\beta) = 1$. Если $\alpha \neq \beta$, положим $x \in \Omega$ удовлетворяет $x(\alpha) \in K_P \subseteq K_\alpha$ и $x(\beta) \in K_R \subseteq K_\beta$, тогда $f(P,\alpha) = 1$, но $f_x((R\beta)) = 0$ есть противоречие. Следовательно, $\alpha = \beta$. Теперь следует, что если $x(\alpha) \in K_P$, тогда $x(\alpha) \in K_R$ и, поскольку $P \leq R$, то $(P_\alpha) \subset (Q,\beta)$. С помощью нашей теоремы заключаем, что исследуемая система Охса может быть представлена как σ_0- класс подмножеств фазового пространства Ω. Используя факт, что свободные от дисперсии состояния f_x есть σ- состояния, мы получим строгий результат, что представление есть σ-изоморфизм.

ЛИТЕРАТУРА

I. W. Ochs, Nuovo Cimento

2. W. Ochs, Nuovo Cimento

3. S. Gudder Proc. Am. Math. Soc. I9, 3I9 (I968)

Rev. Mod. Phys. т.40, 229 (I968)

4. P. Supples Phil. Sci. т.33, I4 (I966)

S. Gudder Proc. Am. Math. Soc. т.2I, 296 (I969)