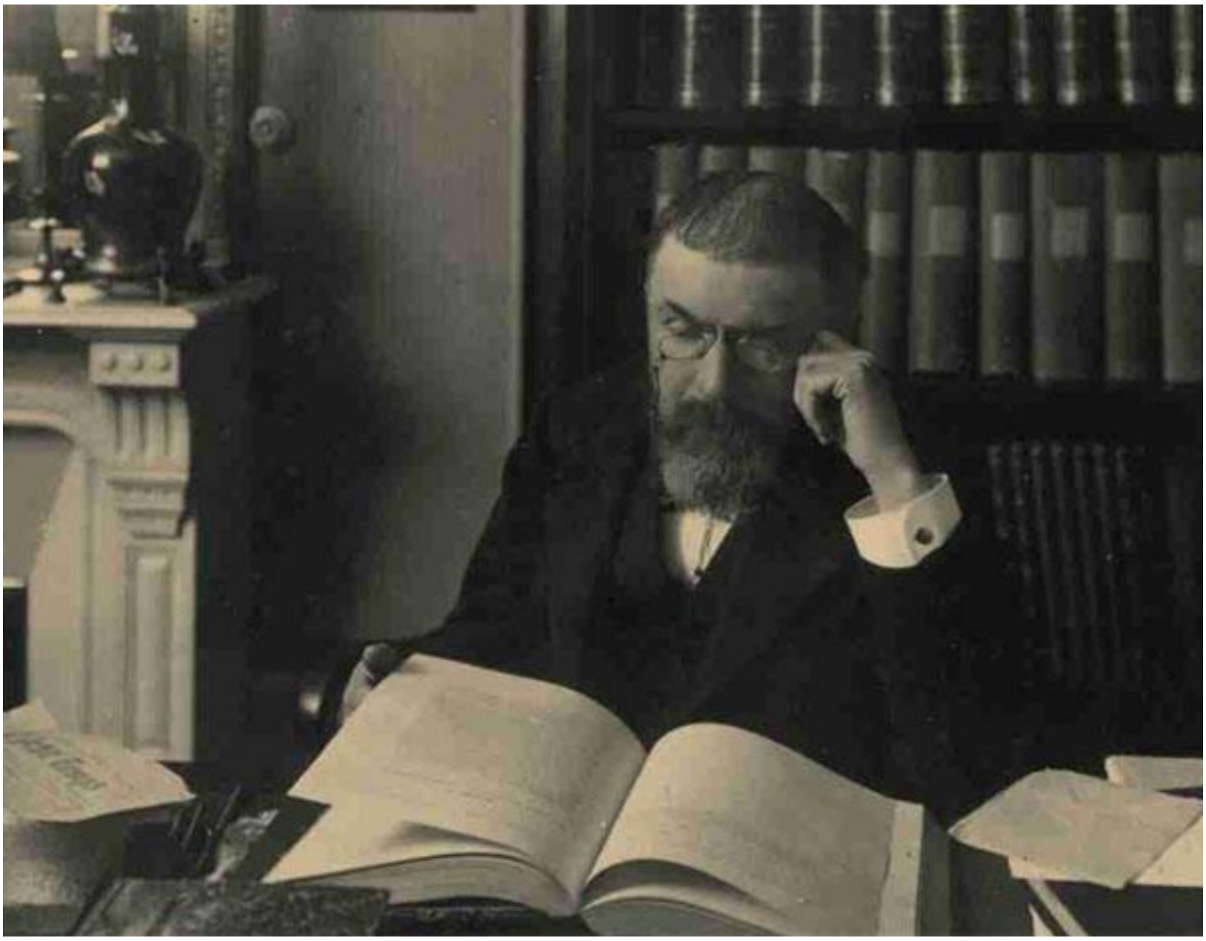
ФОРМЫ ПРОСТРАНСТВА

http://www.modcos.com/articles.php?id=118

В 1904 г. Анри Пуанкаре предположил, что любой трехмерный объект, обладающий определенными свойствами трехмерной сферы, можно преобразовать в 3-сферу. На доказательство этой гипотезы ушло 99 лет. (Внимание! Трехмерная сфера – это не то, о чем вы подумали). Российский математик доказал высказанную сто лет назад гипотезу Пуанкаре и завершил создание каталога форм трехмерных пространств. Возможно, он получит премию в $1 млн.



Оглянитесь вокруг. Окружающие вас предметы, как и вы сами, представляют собой набор частиц, перемещающихся в трехмерном пространстве (3-многообразии), которое простирается во всех направлениях на многие миллиарды световых лет.

Многообразия – это математические построения. Со времен Галилея и Кеплера ученые успешно описывают действительность в терминах той или иной ветви математики. Физики считают, что все на свете происходит в трехмерном пространстве и положение любой частицы можно задать тремя числами, например, широтой, долготой и высотой (оставим пока в стороне высказанное в теории струн предположение о том, что помимо трех наблюдаемых нами измерений существуют еще несколько дополнительных).

Согласно классической и традиционной квантовой физике, пространство фиксировано и неизменно. В то же время общая теория относительности рассматривает его как активного участника событий: расстояние между двумя точками зависит от проходящих гравитационных волн и от того, сколько вещества и энергии расположено вблизи. Но и в ньютоновской, и в эйнштейновской физике пространство – бесконечное или конечное – в любом случае представляет собой 3-многообразие. Поэтому для полного понимания основ, на которые опирается почти вся современная наука, необходимо разобраться в свойствах 3-многообразий (не меньший интерес вызывают 4-многообразия, так как пространство и время вместе образуют одно из них).

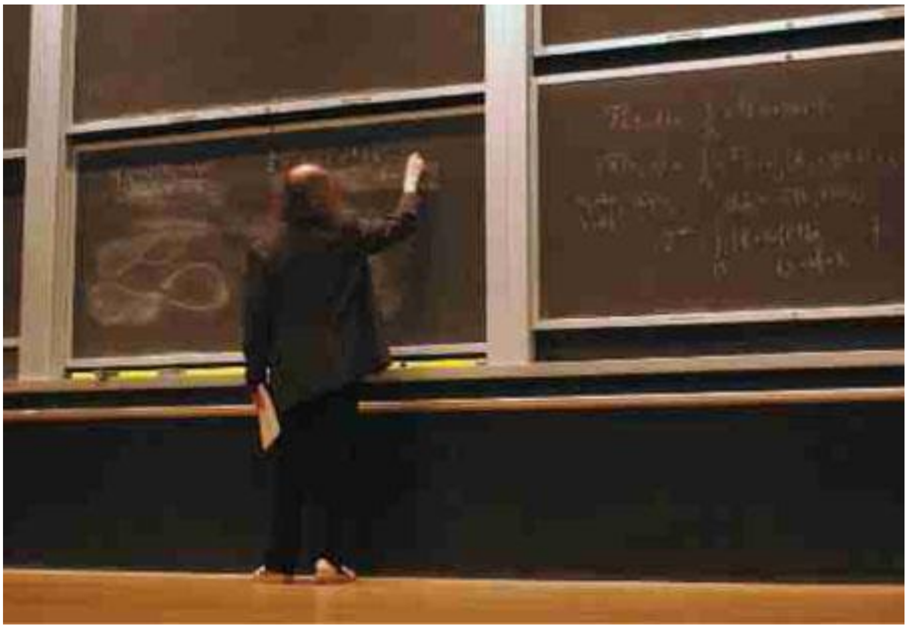
Раздел математики, в котором изучаются многообразия, называется топологией. Топологи прежде всего задались фундаментальными вопросами: каков самый простой (т.е. характеризующийся наименее сложной структурой) тип 3-многообразия? Есть ли у него столь же простые собратья или же он уникален? Какие вообще бывают 3-многообразия?

Ответ на первый вопрос известен давно: самым простым компактным 3-многообразием является пространство, называемое 3-сферой (Некомпактные многообразия бесконечны или имеют края. Далее рассматриваются только компактные многообразия). Два других вопроса оставались открытыми на протяжении столетия. Лишь в 2002 г. на них ответил российский математик Григорий Перельман, который, судя по всему, сумел доказать гипотезу Пуанкаре.

Ровно сто лет назад французский математик Анри Пуанкаре предположил, что 3-сфера уникальна и никакое другое компактное 3-многообразие не обладает теми свойствами, которые делают ее столь простой. У более сложных 3-многообразий есть границы, встающие как кирпичная стена, или множественные связи между некоторыми областями, похожие на лесную тропинку, которая то разветвляется, то снова соединяется. Любой трехмерный объект со свойствами 3-сферы можно преобразовать в нее саму, поэтому для топологов он представляется просто ее копией. Доказательство Перельмана также позволяет ответить на третий вопрос и провести классификацию всех существующих 3-многообразий.

Вам потребуется изрядное воображение, чтобы представить себе 3-сферу (см. МНОГОМЕРНАЯ МУЗЫКА СФЕР). К счастью, у нее много общего с 2-сферой, типичный пример которой – резина круглого воздушного шарика: она двухмерна, поскольку любая точка на ней задается всего двумя координатами – широтой и долготой. Если рассмотреть достаточно маленький ее участок под мощной лупой, то он покажется кусочком плоского листа. Крошечному насекомому, ползающему по воздушному шарику, он будет казаться плоской поверхностью. Но если козявка будет достаточно долго двигаться по прямой, то в конечном счете вернется в точку отправления. Точно так же 3-сферу размером с нашу Вселенную мы бы воспринимали как «обычное» трехмерное пространство. Пролетев достаточно далеко в любом направлении, мы бы в конце концов совершили «кругосветное путешествие» по ней и оказались бы в исходной точке.

Как вы уже догадались, n-мерная сфера называется n-сферой. Например, 1-сфера всем знакома: это просто окружность.



Григорий Перельман излагает свое доказательство гипотезы Пуанкаре и завершение программы Терстона по геометризации на семинаре в Принстонском университете в апреле 2003 г.

Проверка гипотез

Прошла половина столетия, прежде чем дело о гипотезе Пуанкаре сдвинулось с мертвой точки. В 60-х гг. XX в. математики доказали аналогичные ей утверждения для сфер пяти и более измерений. В каждом случае n-сфера действительно является единственным и простейшим n-многообразием. Как ни странно, получить результат для многомерных сфер оказалось легче, чем для 3- и 4-сферы.

Доказательство для четырех измерений появилось в 1982 г. И только исходная гипотеза Пуанкаре о 3-сфере оставалась неподтвержденной.

Решающий шаг был сделан в ноябре 2002 г., когда Григорий Перельман, математик из Санкт-Петербургского отделения математического института им. Стеклова, отправил статью на сайт www.arxiv.org, где физики и математики со всего мира обсуждают результаты своей научной деятельности.

Топологи сразу уловили связь работы российского ученого с гипотезой Пуанкаре, хотя напрямую автор ее не упомянул. В марте 2003 г. Перельман опубликовал вторую статью и весной того же года посетил США и провел несколько семинаров в Массачусетском технологическом институте и в Университете штата Нью-Йорк в Стоуни-Брук. Несколько групп математиков в ведущих институтах тут же занялись детальным изучением представленных работ и поиском ошибок.

ОБЗОР: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ ПУАНКАРЕ

- Целое столетие математики пытались доказать предположение Анри Пуанкаре об исключительной простоте и уникальности 3-сферы среди всех трехмерных объектов.
- Обоснование гипотезы Пуанкаре наконец появилось в работе молодого российского математика Григория Перельмана. Он также завершил обширную программу классификации трехмерных многообразий.
- Возможно, наша Вселенная имеет форму 3-сферы. Есть и другие интригующие связи математики с физикой элементарных частиц и общей теорией относительности.

В Стоуни-Брук за две недели Перельман прочитал несколько лекций, выступая от трех до шести часов в день. Он очень четко изложил материал и ответил на все возникшие вопросы. До получения окончательного результата остался еще один незначительный шаг, но нет никаких сомнений в том, что он вот-вот будет сделан. Первая статья знакомит читателя с основополагающими идеями и считается полностью проверенной. Во второй статье освещаются прикладные вопросы и технические нюансы; она пока еще не вызывает такого же полного доверия, как ее предшественница.

В 2000 г. Институт математики им. Клея в Кембридже, штат Массачусетс, учредил премию в размере $1 млн. за доказательство каждой из семи «Проблем тысячелетия», одной из которых считается гипотеза Пуанкаре. Прежде чем ученый сможет претендовать на приз, его доказательство должно быть опубликовано и в течение двух лет тщательно проверено.

Работа Перельмана расширяет и завершает программу исследований, проведенных в 90-х гг. прошлого века Ричардом Гамильтоном (Richard S. Hamilton) из Колумбийского университета. В конце 2003 г. труды американского математика были отмечены премией Института Клея. Перельману удалось блестяще преодолеть целый ряд препятствий, с которыми не смог справиться Гамильтон.

На самом деле доказательство Перельмана, правильность которого еще никому не удалось поставить под сомнение, решает гораздо более широкий круг вопросов, чем собственно гипотеза Пуанкаре. Предложенная Уильямом Терстоном (William P. Thurston) из Корнеллского университета процедура геометризации позволяет провести полную классификацию 3-многообразий, в основу которой положена 3-сфера, уникальная в своей возвышенной простоте. Если бы гипотеза Пуанкаре была ложной, т.е. существовало бы множество пространств столь же простых, как сфера, то классификация 3-многообразий превратилась бы в нечто бесконечно более сложное. Благодаря Перельману и Терстону у нас появился полный каталог всех допускаемых математикой форм трехмерного пространства, которые могла бы принять наша Вселенная (если рассматривать только пространство без времени).

Резиновые бублики

Чтобы глубже понять гипотезу Пуанкаре и доказательство Перельмана, следует поближе познакомиться с топологией. В этом разделе математики форма объекта не имеет значения, как будто он сделан из теста, которое можно как угодно растягивать, сжимать и изгибать. Зачем же нам задумываться о вещах или пространствах из воображаемого теста? Дело в том, что точная форма объекта – расстояние между всеми его точками – относится к структурному уровню, который называют геометрией. Рассматривая объект из теста, топологи выявляют его фундаментальные свойства, не зависящие от геометрической структуры. Изучение топологии похоже на поиск наиболее общих черт, присущих людям, методом рассмотрения «пластилинового человека», которого можно превратить в любого конкретного индивида.

В популярной литературе часто встречается избитое утверждение, что с точки зрения топологии чашка ничем не отличается от бублика. Дело в том, что чашку из теста можно превратить в бублик, просто сминая материал, т.е. ничего не слепляя и не проделывая отверстий (см. ТОПОЛОГИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ). С другой стороны, чтобы сделать бублик из шара, в нем непременно нужно сделать дырку или раскатать его в цилиндр и слепить концы, поэтому шар – это совсем не бублик.

Топологов больше всего интересуют поверхности шара и бублика. Поэтому вместо сплошных тел следует представлять себе воздушные шарики. Их топология по-прежнему различна, поскольку сферический воздушный шарик невозможно преобразовать в кольцевой, который называется тором. Сначала ученые решили разобраться, сколько вообще существует объектов с различной топологией и как их можно охарактеризовать. Для 2-многообразий, которые мы привыкли называть поверхностями, ответ изящен и прост: все определяется количеством «дырок» или, что то же самое, количеством ручек (см. ТОПОЛОГИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ).К концу XIX в. математики поняли, как классифицировать поверхности, и установили, что самая простая из них – сфера. Естественно, топологи начали задумываться о трехмерных многообразиях: уникальна ли 3-сфера в своей простоте? Вековая история поисков ответа полна неверных шагов и ошибочных доказательств.

Анри Пуанкаре вплотную занялся этим вопросом. Он был одним из двух сильнейших математиков начала XX в. (другим был Давид Гильберт). Его называли последним универсалом – он успешно работал во всех разделах как чистой, так и прикладной математики. Кроме того, Пуанкаре внес огромный вклад в развитие небесной механики, теорию электромагнетизма, а также в философию науки, о которой написал несколько популярных книг.

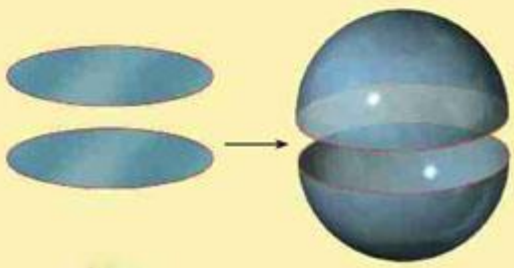
Пуанкаре стал основателем алгебраической топологии и, используя ее методы, в 1900 г. сформулировал топологическую характеристику объекта, названную гомотопией. Чтобы определить гомотопию многообразия, нужно мысленно погрузить в него замкнутую петлю (см. ТОПОЛОГИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ). Затем следует выяснить, всегда ли можно стянуть петлю в точку, перемещая ее внутри многообразия. Для тора ответ будет отрицательным: если расположить петлю по окружности тора, то стянуть ее в точку не удастся, т.к. будет мешать «дырка» бублика. Гомотопия – это количество различных путей, которые могут воспрепятствовать стягиванию петли.

МНОГОМЕРНАЯ МУЗЫКА СФЕР

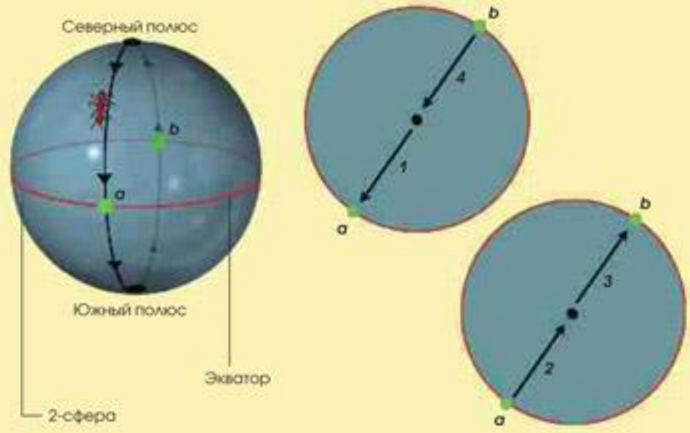
Не так-то просто представить себе 3-сферу. Математикам, доказывающим теоремы о многомерных пространствах, не приходится воображать себе объект изучения: они обращаются с абстрактными свойствами, руководствуясь интуитивными представлениями, основанными на аналогиях с меньшим числом измерений (к таким аналогиям нужно относиться с осторожностью и не принимать их буквально). Мы тоже будем рассматривать 3-сферу, исходя из свойств объектов с меньшим числом измерений.

1. Начнем с рассмотрения круга и ограничивающей его окружности. Для математиков круг – это двумерный шар, а окружность – одномерная сфера. Далее, шар любой размерности – это заполненный объект, напоминающий арбуз, а сфера – это его поверхность, больше похожая на воздушный шарик. Окружность одномерна, потому что положение точки на ней можно задать одним числом.

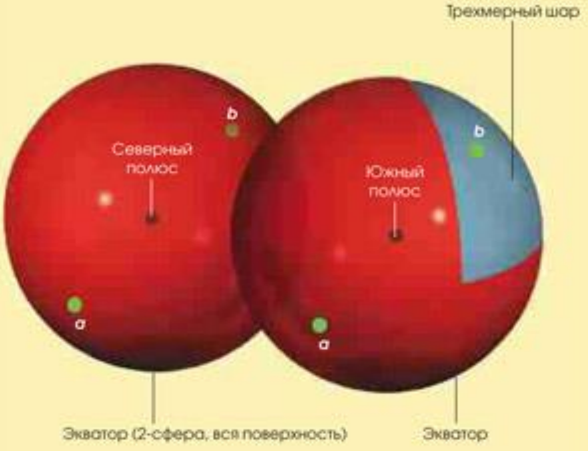
2. Из двух кругов мы можем построить двумерную сферу, превратив один из них в Северное полушарие, а другой – в Южное. Осталось склеить их, и 2-сфера готова.



3. Представим себе муравья, ползущего с Северного полюса по большому кругу, образованному нулевым и 180-м меридианом (слева). Если мы отобразим его путь на два исходных круга (справа), то увидим, что насекомое движется по прямой линии (1) к краю северного круга (а), затем пересекает границу, попадает в соответствующую точку на южном круге и продолжает следовать по прямой линии (2 и 3). Затем муравей снова достигает края (b), переходит его и снова оказывается на северном круге, устремляясь к исходной точке – Северному полюсу (4). Заметьте, что во время кругосветного путешествия по 2-сфере направление движения сменяется на противоположное при переходе с одного круга на другой.

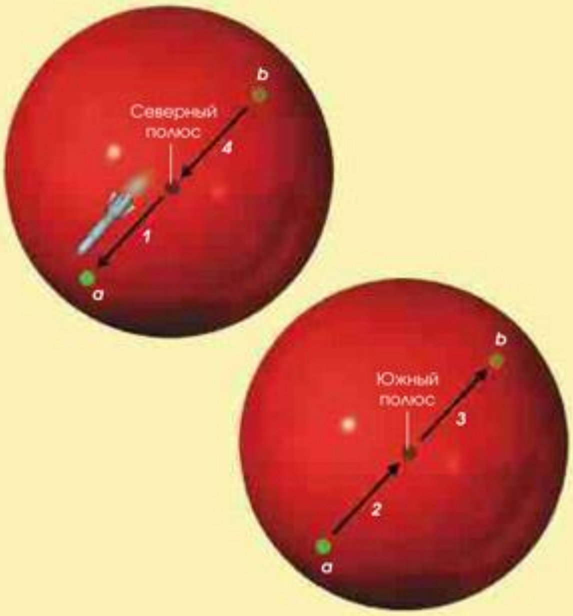


4. Теперь рассмотрим нашу 2-сферу и содержащийся в ней объем (трехмерный шар) и сделаем с ними то же самое, что с окружностью и кругом: возьмем две копии шара и склеим их границы вместе. Наглядно показать, как шары искажаются в четырех измерениях и превращаются в аналог полушарий, невозможно, да и не нужно. Достаточно знать, что соответствующие точки на поверхностях, т.е. 2-сферах, соединены между собой так же, как в случае с окружностями. Результат соединения двух шаров представляет собой 3-сферу – поверхность четырехмерного шара. (В четырех измерениях, где существуют 3-сфера и 4-шар, поверхность объекта трехмерна.) Назовем один шар северным полушарием, а другой – южным. По аналогии с кругами, полюса теперь находятся в центрах шаров.



5. Вообразите, что рассмотренные шары – большие пустые области пространства. Допустим, из Северного полюса отправляется космонавт на ракете. Со временем он достигает экватора (1), которым теперь является сфера, окружающая северный шар. Пересекая ее, ракета попадает в южное полушарие и движется по прямой линии через его центр – Южный полюс – к противоположной стороне экватора (2 и 3). Там снова происходит переход в северное полушарие, и путешественник возвращается в Северный полюс, т.е. в исходную точку (4). Таков сценарий кругосветного путешествия по поверхности 4-мерного шара! Рассмотренная трехмерная сфера и есть то пространство, о котором идет речь в гипотезе Пуанкаре. Возможно, наша Вселенная представляет собой именно 3-сферу.

Рассуждения можно распространить на пять измерений и построить 4-сферу, но вообразить это чрезвычайно сложно. Если склеить два n-шара по окружающим их (n–1)-сферам, то получится n-сфера, ограничивающая (n+1)-шар.



На n-сфере любую, даже замысловато закрученную петлю всегда можно распутать и стянуть в точку. (Петле разрешается проходить через саму себя.) Пуанкаре предполагал, что 3-сфера – единственное 3-многообразие, на котором в точку можно стянуть любую петлю. К сожалению, он так и не смог доказать свое предположение, которое впоследствии стали называть гипотезой Пуанкаре. За прошедшие сто лет многие предлагали свой вариант доказательства, но лишь для того, чтобы убедиться в его ошибочности. (Для простоты изложения я пренебрегаю двумя особыми случаями: так называемыми неориентируемыми многообразиями и многообразиями с краями. Например, у сферы с вырезанным из нее сегментом есть край, а петля Мебиуса не только имеет края, но также является неориентируемой.)

Геометризация

Проведенный Перельманом анализ 3-многообразий тесно связан с процедурой геометризации. Геометрия имеет дело с фактической формой объектов и многообразий, сделанных уже не из теста, а из керамики. Например, чашка и бублик геометрически различны, поскольку их поверхности изогнуты по-разному. Говорят, что чашка и бублик – два примера топологического тора, которому приданы разные геометрические формы.

Чтобы понять, зачем Перельман использовал геометризацию, рассмотрим классификацию 2-многообразий. Каждой топологической поверхности назначена уникальная геометрия, искривление которой распределено по многообразию равномерно. Например, для сферы – это идеально сферическая поверхность. Другая возможная геометрия для топологической сферы – яйцо, но его кривизна не везде распределена равномерно: острый конец изогнут сильнее, чем тупой.

2-многообразия образуют три геометрических типа (см. ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ). Сфера характеризуется положительной кривизной. Геометризированный тор – плоский, ему свойственна нулевая кривизна. Все остальные 2-многообразия с двумя или более «дырками» имеют отрицательную кривизну. Им соответствует поверхность, похожая на седло, которое спереди и сзади изгибается вверх, а слева и справа –вниз. Такую геометрическую классификацию (геометризацию) 2-многообразий Пуанкаре разработал вместе с Паулем Кебе (Paul Koebe) и Феликсом Клейном (Felix Klein), именем которого названа бутылка Клейна.

Возникает естественное желание применить подобный метод к 3-многообразиям. Можно ли найти для каждого из них такую уникальную конфигурацию, у которой кривизна была бы распределена равномерно по всему многообразию?

Оказалось, что 3-многообразия гораздо сложнее своих двумерных собратьев и большинству из них нельзя поставить в соответствие однородную геометрию. Их следует разделять на части, которым соответствует
одна из восьми канонических геометрий. Данная процедура напоминает разложение числа на простые множители.

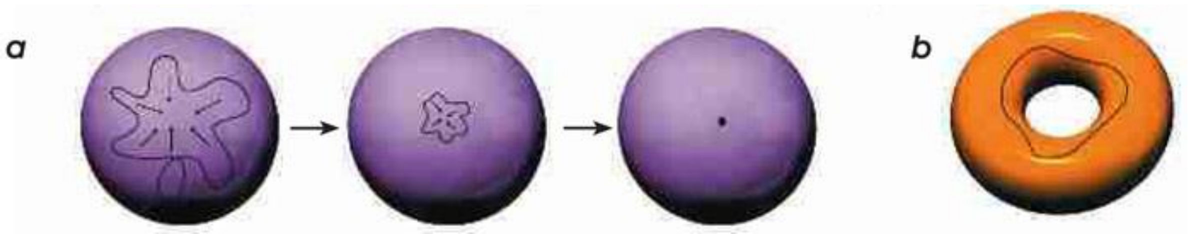
ТОПОЛОГИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В ТОПОЛОГИИ точная форма, т.е. геометрия, не имеет значения: объекты рассматриваются так, как будто они сделаны из теста и их можно растягивать, сжимать и перекручивать. Однако резать и склеивать ничего нельзя. Таким образом, любой объект с одним отверстием, например, кофейная чашка (слева), эквивалентен бублику или тору (справа).

ЛЮБОЕ ДВУМЕРНОЕ многообразие или поверхность (ограничиваясь компактными ориентируемыми объектами) можно изготовить, добавляя к сфере (а) ручки. Прилепим одну –

сделаем поверхность 1 рода, т.е. тор или бублик (вверху справа), добавим вторую – получим поверхность 2 рода (b) и т.д.

УНИКАЛЬНОСТЬ 2-сферы среди поверхностей заключается в том, что любую вложенную в нее замкнутую петлю можно стянуть в точку (a). На торе этому может препятствовать среднее отверстие (b). У любой поверхности, кроме 2-сферы, есть ручки, препятствующие стягиванию петли. Пуанкаре предположил, что 3-сфера уникальна среди трехмерных многообразий: только на ней любую петлю можно стянуть в точку.

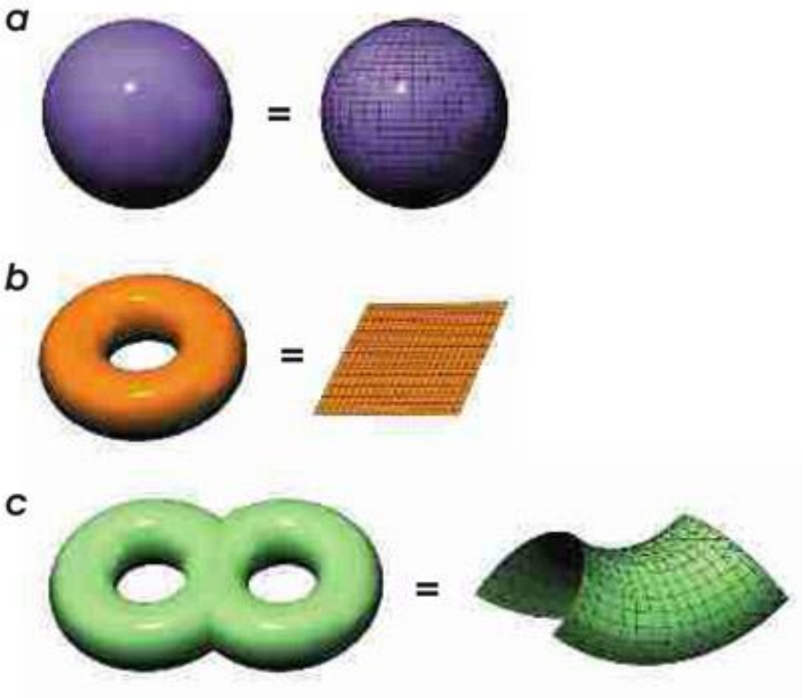


Такая процедура классификации впервые была предложена Терстоном в конце 70-х гг. прошлого века. Вместе с коллегами он обосновал большую ее часть, но доказательство некоторых ключевых моментов (включая гипотезу Пуанкаре) оказалось им не под силу. Уникальна ли 3-сфера? Достоверный ответ на этот вопрос впервые появился в статьях Перельмана.

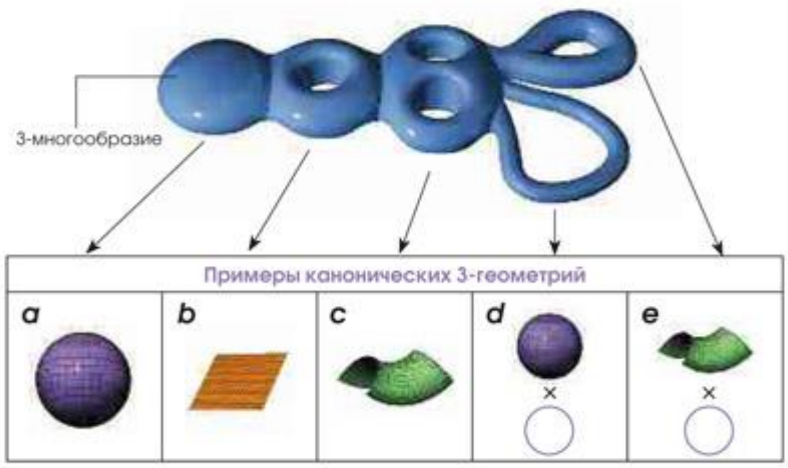
Каким же образом можно геометризировать многообразие и придать ему повсюду равномерное искривление? Нужно взять некую произвольную геометрию с различными выступами и углублениями, а затем сгладить все неровности. В начале 90-х гг. XX в. к анализу 3-многообразий приступил Гамильтон, который воспользовался уравнением потока Риччи, названным так в честь математика Грегорио Риччи-Курбастро (Gregorio Ricci-Curbastro). Оно в чем-то схоже с уравнением теплопроводности, которое описывает тепловые потоки, протекающие в неравномерно нагретом теле до тех пор, пока его температура не станет везде одинаковой. Точно так же уравнение потока Риччи задает такое изменение кривизны многообразия, которое ведет к выравниванию всех выступов и углублений. Например, если начать с яйца, то оно постепенно станет сферическим.

ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ

ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ 2-многообразий можно воспользоваться униформизацией или геометризацией: поставить им в соответствие определенную геометрию, жесткую форму. В частности, каждое многообразие можно преобразовать так, что его кривизна будет распределена равномерно. Сфера (a) – уникальная форма с постоянной положительной кривизной: она всюду изогнута как вершина холма. Тор (b) можно сделать плоским, т.е. всюду имеющим нулевую кривизну. Для этого его нужно разрезать и выпрямить. Полученный цилиндр следует разрезать вдоль и развернуть, чтобы получилась прямоугольная плоскость. Иными словами, тор можно отобразить на плоскость. Поверхностям 2 рода и выше (c) можно придать постоянную отрицательную кривизну, при этом их геометрия будет зависеть от количества ручек. Ниже изображена седлообразная поверхность с постоянной отрицательной кривизной.



КЛАССИФИЦИРОВАТЬ 3-МНОГООБРАЗИЯ гораздо сложнее. 3-многообразие приходится разделять на части, каждую из которых можно преобразовать в одну из восьми канонических трехмерных геометрий. Приведенный ниже пример (для простоты изображенный в виде 2-многообразия синего цвета) составлен из 3-геометрий с постоянной положительной (a), нулевой (b) и постоянной отрицательной (c) кривизной, а также из «произведений» 2-сферы и окружности (d) и поверхности с отрицательной кривизной и окружности (e).



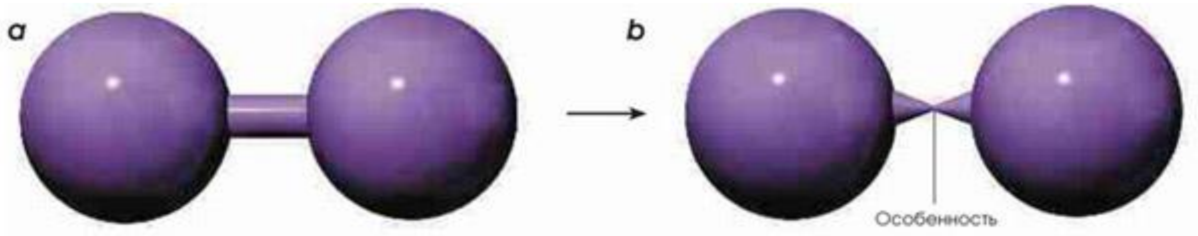
Однако Гамильтон столкнулся с определенными трудностями: в некоторых случаях поток Риччи приводит к пережиму многообразия и образованию бесконечно тонкой шейки. (В этом его отличие от теплового потока: в точках пережима температура была бы бесконечно большой.) Один из примеров – многообразие в форме гантели. Сферы растут, втягивая материал из перемычки, которая в середине сужается в точку (см. БОРЬБА С ОСОБЕННОСТЯМИ). В другом случае, когда из многообразия выступает тонкий стержень, поток Риччи вызывает появление так называемой сигарообразной особенности. В правильном 3-многообразии окрестность любой точки является кусочком обычного трехмерного пространства, чего нельзя сказать о сингулярных точках пережима. Преодолеть это затруднение помогли работы российского математика.

В 1992 г. после защиты кандидатской диссертации Перельман прибыл в США и провел несколько семестров в университете штата Нью-Йорк в Стоуни-Брук, а затем два года в Калифорнийском университете в Беркли. Он быстро заслужил репутацию восходящей звезды, получив несколько важных и глубоких результатов в одном из разделов геометрии. Перельман был удостоен премии Европейского математического общества (от которой он отказался) и получил престижное приглашение выступить на Международном конгрессе математиков (которое он принял).

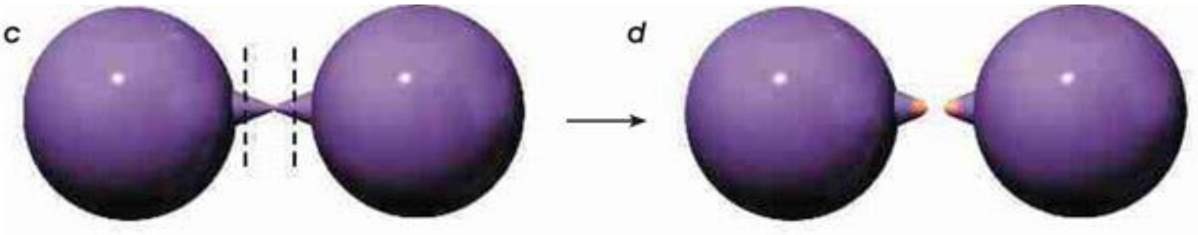
Весной 1995 г. ему были предложены должности в нескольких знаменитых математических учреждениях, но он предпочел вернуться в родной Санкт-Петербург и по существу исчез из поля зрения. На протяжении многих лет единственным признаком его деятельности были письма прежним коллегам с указанием ошибок, допущенных в опубликованных ими статьях. Запросы о состоянии его собственных работ оставались без ответа. И вот в конце 2002 г. несколько человек получили от Перельмана электронное письмо, сообщавшее о статье, которую он отправил на математический сервер. Так началось его наступление на гипотезу Пуанкаре.

БОРЬБА С ОСОБЕННОСТЯМИ

ПЫТАЯСЬ ИСПОЛЬЗОВАТЬ уравнение потока Риччи для доказательства гипотезы Пуанкаре и геометризации 3-многообразий, ученые столкнулись с трудностями, которые сумел преодолеть Григорий Перельман. Применение потока Риччи для постепенного изменения формы 3-многообразия иногда приводит к возникновению особенностей. Например, когда часть объекта имеет форму гантели (а), трубка между сферами может оказаться пережатой до точечного сечения, нарушающего свойства многообразия (b). Также не исключено появление так называемой сигарообразной особенности.



ПЕРЕЛЬМАН ПОКАЗАЛ, что над особенностями можно проводить «хирургические операции». Когда многообразие начинает пережиматься, следует вырезать небольшие участки по обе стороны от точки сужения (с), места среза закрыть небольшими сферами, а затем снова использовать поток Риччи (d). Если пережим возникает снова, процедуру нужно повторить. Перельман также доказал, что сигарообразная особенность никогда не появляется.



Перельман добавил к уравнению потока Риччи новый член. Внесенное изменение не устранило проблему особенностей, но позволило провести гораздо более глубокий анализ. Российский ученый показал, что над многообразием в виде гантели можно провести «хирургическую» операцию: отрезать тонкую трубку по обе стороны от появляющегося пережима и заделать торчащие из шаров открытые трубки сферическими колпачками. Затем следует продолжать изменение «прооперированного» многообразия в соответствии с урав нением потока Риччи, а ко всем возникающим пережимам применять вышеописанную процедуру. Перельман также показал, что сигарообразные особенности появляться не могут. Таким образом, любое 3-многообразие можно свести к набору частей с однородной геометрией.

Когда поток Риччи и «хирургическую операцию» применяют ко всем возможным 3-многообразиям, любое из них, если оно столь же простое, как 3-сфера (иначе говоря, характеризуется такой же гомотопией), обязательно сводится к той же самой однородной геометрии, что и 3-сфера. Значит, с топологической точки зрения, рассматриваемое многообразие и есть 3-сфера. Таким образом, 3-сфера уникальна.

Ценность статей Перельмана заключается не только в доказательстве гипотезы Пуанкаре, но и в новых методах анализа. Ученые всего мира уже используют в своих работах результаты, полученные российским математиком, и применяют разработанные им методы в других областях. Оказалось, что поток Риччи связан с так называемой группой перенормировки, которая определяет, как изменяется сила взаимодействий в зависимости от энергии столкновения частиц. Например, при низких энергиях сила электромагнитного взаимодействия характеризуется числом 0,0073 (приблизительно 1/137). Однако когда два электрона сталкиваются лоб в лоб при скорости, почти равной скорости света, значение этой силы приближается к 0,0078. Математика, описывающая изменение физических сил, очень похожа на математику, описывающую геометризацию многообразия.

Увеличение энергии столкновения эквивалентно изучению силы на меньших расстояниях. Поэтому группа перенормировки подобна микроскопу с изменяемым коэффициентом увеличения, который позволяет исследовать процесс на разных уровнях детализации. Точно так же поток Риччи представляет собой микроскоп для рассмотрения многообразий. Выступы и углубления, видимые при одном увеличении, исчезают при другом. Вполне вероятно, что в масштабах длины Планка (около 10^{-35}м) пространство, в котором мы живем, выглядит как пена со сложной топологической структурой (см. статью «Атомы пространства и времени», «В мире науки», №4, 2004 г.). Кроме того, уравнения общей теории относительности, которые описывают характеристики гравитации и крупномасштабной структуры Вселенной, тесно связаны с уравнением потока Риччи. Как это ни парадоксально, член, добавленный Перельманом к выражению, которое использовал Гамильтон, возникает в теории струн, претендующей на звание квантовой теории гравитации. Не исключено, что в статьях российского математика ученые найдут еще много полезной информации не только об абстрактных 3-многообразиях, но также и о пространстве, в котором мы живем.

ОБ АВТОРЕ:

Кандидат физико-математических наук Грэхем Коллинз (Graham P. Collins) работает редактором журнала Scientific American. Дополнительная информация о теореме Пуанкаре доступна на www.sciam.com/ontheweb.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. The Poincare Conjecture 99 Years Later: A Progress Report. John W. Milnor. February 2003. Available at www.math.sunysb.edu/~jack/PREPRINTS/poiproof.pdf
2. Jules Henri Poincare ’ (biography). October 2003. Available atwww-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Poincare.html
3. Millennium Problems. The Clay Mathematics Institute: www.claymath.org/millennium/
4. Notes and commentary on Perelman’s Ricci flow papers. Compiled by Bruce Kleiner and John Lott. Available at www.math.lsa.umich.edu/research/ricciflow/perelman.html
5. Topology. Eric W. Weisstein in Mathworld-A Wolfram Web Resource. Available at www.mathworld.wolfram.com/Topology.html

Комментарии (3):

Влад •

Вселенная может иметь форму не какого-нибудь там шара или додекаэдра, а ... рожка или горна. Точнее говоря весь наш космос оказывается вытянут в этакую длинную трубку, с узким концом с одной стороны и "раструбом" с другой. Такая "конструкция" нашей Вселенной кроме всего прочего подразумевает, что она конечна, а в каких-то ее местах встречаются области, где можно увидеть собственный затылок. Возможно, для "здравомыслящих" людей все это прозвучит как полный бред или мечта сюрреалиста, однако выкладки математика Франка Штайнера (Frank Steiner) из германского Университета Ульма (Universität Ulm) и его коллег основаны на авторитетных экспериментальных данных, полученных в 2003 году все тем же знаменитым зондом WMAP (NASA's Wilkinson Microwave Anisotropy Probe).

Игорь •

Крупномасштабная геометрия Вселенной представляет собой фундаментальную проблему космологии, особенно важны ее пространственная кривизна и топология. Уравнения Эйнштейна для гравитационного поля определяют лишь локальные свойства пространства-времени, но не глобальную структуру Вселенной в целом. В так называемой космологической модели соответствия (concordance model of cosmology) предполагается, что пространство Вселенной в больших масштабах обладает тривиальной топологией и при этом подразумевается, что она имеет бесконечный объем. При рассмотрении различных сценариев инфляционного расширения (теперь они, во многом благодаря тому же WMAP, признаны самыми вероятными) эти свойства нашего космоса определяются начальными условиями, возникшими в момент Большого взрыва. Однако так как до сих пор не решен вопрос с квантовой теорией гравитации, эти начальные условия не могут быть предсказаны теоретически. Вместо этого приходится анализировать свежие астрофизические данные, и особенно интересны в этой связи данные по космическому микроволновому фону (реликтовое излучение). Пользуясь этими данными (своего рода "снимком" Вселенной, которой было всего 380 тысяч лет отроду), в принципе можно вывести уравнения, определяющие кривизну и топологию Вселенной в больших масштабах. И в вариациях температуры реликтового излучения ученые видят явные намеки на нетривиальность топологии нашей Вселенной

Саша •

Новая диковинная модель призвана объяснить два загадочных обстоятельства, так озадачивающих астрофизиков: во-первых, необычный характер распределения "горячих" и "холодных" пятен в космическом микроволновом излучении, а во-вторых, "глушение" сигнала при больших масштабах (обнаружено отсутствие каких-либо ясно выраженных "горячих" или "холодных" участков при углах свыше примерно 60 градусов). Текущий объем Вселенной по Штайнеру составляет около 10^{32} кубических световых лет. Когда же Вселенной было только 380 тысяч лет, то она была столь мала, что в ней просто не могли возникнуть достаточно большие флуктуации.