https://don-beaver.livejournal.com/196412.html#/196412.html
*don_beaver, 11 марта 2018 г.*

# Тёмная энергия с инфляцией: RIP

Вторая статья с Александром Васильковым, посвященная космологии и космологической постоянной, опубликована в Monthly Notices of the Royal Astronomical Society!

Копия вышедшей статьи прилагается. Статья выдержала самую тщательную проверку в MNRAS в течение нескольких месяцев. Отмечу, что британский MNRAS публикуется с 1827 года, и сейчас имеет импакт-фактор около 5, образуя вместе американскими Astrophys. Journal и Astrophys. Journal Letters мировую тройку самых авторитетных журналов по астрофизике и астрономии, печатающих оригинальные научные статьи (не обзоры). Искренне восхищен работой научных рецензентов этого журнала, их дотошностью и профессионализмом.

Содержание новой работы будет понятно из следующего обзорного текста о новой космологии, к которой нас подводят последние теоретические и наблюдательные результаты. Этот текст – стартовый для третьей, завершающей статьи по космологии.

С середины XX века до начала 80-х активно развивалась и была научным майнстримом в космологии модель отскока - “rebound cosmology” или “Big Bounce Cosmology” (которую можно рассматривать как предельно простой случай циклической космологии, свободной от сингулярностей). Она началась в 40-х годах с работ Гамова, Альфера и Хермана, но её развивали, разделяли и излагали в своих статьях и книгах практически все видные гравитационисты и космологи – Дикке, Вилкинсон, Вайнберг, Мизнер, Пибблс и другие.

Gamow G. “The Creation of the Universe”, 1953, p.29: “We can now ask ourselves two important questions: why was our universe in such a highly compressed state, and why did it start expanding? The simplest, and mathematically most consistent, way of answering these questions would be to say that the Big Squeeze which took place in the early history of our universe was the result of a collapse which took place at a still earlier era, and that the present expansion is simply an “elastic” rebound which started as soon as the maximum permissible squeezing density was reached”.
Dicke R.H., Peebles P.J.E., Roll P.G., Wilkinson D.T., 1965, Astrophys. J., 142, 414 (классическая статья, сопровождающая статью Пензиаса и Вильсона об открытии реликтового излучения): “…for the matter we see about us now may represent the same baryon content of the previous expansion of a closed universe, oscillating for all time. This relieves us of the necessity of understanding the origin of matter at any finite time in the past. In this picture it is essential to suppose that at the time of maximum collapse the temperature of the universe would exceed 10^10 K, in order that the ashes of the previous cycle would have been reprocessing back to the hydrogen required for the stars in the next cycle”. “A temperature in excess of 10^10 K during the highly contracted phase of the universe is strongly implied by a present temperature of 3.5 K for black-body radiation”. “Assuming a singularity-free oscillating cosmology, we believe that the temperature must have been high enough to decompose the heavy elements from previous cycle…”
Peebles P.J.E. “Principles of Physical Cosmology” 1993, p.141: “Let us extrapolate the expansion of the universe back to redshift z~10^10, when the temperature was T~3*10^10K, and the characteristic photon energy was ~ kT ~3Mev. At this epoch, the CBR photons are hard enough to photodissociate complex nuclei, leaving free neutrons and protons”.

Не буду переводить цитаты, а изложу суть космологии отскока своими словами: возьмем нынешнюю Вселенную, обратим её расширение в сжатие (почему так можно сделать – отдельный вопрос). Когда она сожмется в 10^10 раз – примерно до нескольких световых лет в диаметре, то энергия нынешних реликтовых фотонов в 3К вырастет настолько (до 3*10^10 К или тридцать миллиардов градусов), что они разобьют/превратят все атомные ядра, возникшие в ходе эволюции Вселенной, в свободные протоны и нейтроны. Как поэтично выразились Дикке и др. в 1965 году: фотоны или гамма-кванты переработают «пепел предыдущего цикла». Космология отскока предполагает дальнейший упругий отскок Вселенной со свежим набором барионов – и её расширение в новый цикл. Этот отскок очень логичен, но природа его механизма была неизвестна.

В 80-х в физике элементарных частиц случилась безработица: была успешно создана Стандартная Модель и синхрофазотроны позакрывались. Поэтому в классическую космологию высадился многочисленный десант элементарщиков, выросших на квантовых полях, играя частицами микроскопического размера. Что умеем, то и лепим – поэтому десант создал (и умело вытеснил ею все альтернативы) одноразовую модель Вселенной, вырастающую чудесным образом из микрочастицы и управляемую гипотетическими квантовыми полями: инфлантоном вначале и темной энергией вакуума потом. На роль темной материи, на существование которой указывают кривые вращения галактик и другие наблюдения, опять-таки была предложена массивная туча гипотетических элементарных частиц. Но предсказательная сила новой инфляционной теории была близка к нулю (например, открытие ускорения расширения Вселенной стало для неё неожиданностью), хотя задним числом она, обладающая множеством свободных параметров, могла объяснить всё.

В последние годы недовольство инфляционно-тёмной космологией с множеством допущений выросло настолько, что некоторые еретики даже перестали называть её наукой. Возникло или реанимировалось сразу несколько теорий, возвращающих нас к модели циклической вселенной или к космологическим моделям отскока. Мы тоже вынесем за скобки всю квантовую фантасмалогию последних десятилетий и вернёмся к незаслуженно заброшенной классической космологии. Давайте посмотрим, какие изменения вносят в неё последние наблюдательные и теоретические достижения, в первую очередь - экспериментальные результаты ЛИГО, получаемые с 2016 года:
1. Гравитационные волны существуют.
2. Значительная доля массы сливающихся чёрных дыр превращается в гравитационные волны.
3. Во Вселенной есть огромное количество неучтённых черных дыр с массой около 30 масс Солнца.
Последний результат привел к появлению реалистичной модели тёмной материи, состоящей из черных дыр в десятки масс Солнца. Эта модель обсуждается уже два года, и все увереннее набирает очки в среде наблюдателей и теоретиков.

Рассмотрим сжимающуюся Вселенную, в которой, кроме атомов и реликтовых фотонов, существует компонента черных дыр, по массе превосходящая барионную компоненту. Легко показать, что, когда Вселенная достигнет размера в несколько световых лет, эти черные дыры начнут лавинообразно сливаться, уменьшая свою суммарную массу на несколько порядков. В нашей статье в MNRAS 2016 года (где получена и исследована модифицированная метрика Шварцшильда для переменной гравитационной массы) показано, что это неизбежно генерирует мощную отталкивающую силу, которая приводит к ускоренному расширению шара Вселенной из гамма-квантов; черных дыр, уцелевших от слияния, а также из барионов, образовавшихся при разрушении атомных ядер. Там же – гравволны и нейтрино.

Обратим внимание, что черные дыры – единственные материальные макрообъекты, которые могут уцелеть – и даже вырасти - в горниле сжатой Вселенной. Таким образом, проблема Большого Взрыва, которая была главным барьером для космологии отскока, естественно решилась, когда во Вселенную добавили достаточное количество черных дыр: они при сжатии сработали лучше любой взрывчатки. Кроме того, ускоренное расширение Вселенной в этой модели аналогично инфляционному периоду, что, видимо, решает проблему горизонта. Отметим, что решение с переменной гравмассой, как я убедился после многочисленных неудачных попыток, не отвечает за проблемы галактических вращений и не избавляет от необходимости темной материи – это решение, которое работает только на больших, космологических расстояниях.

Но новая космология отскока должна объяснить ещё и наблюдаемое ускорение Вселенной, открытое в 1998 году. Это ускорение хорошо описывается феноменологической космологической константой, вставленной в уравнения Эйнштейна руками самого Эйнштейна. Из уравнения Эйнштейна эта константа перекочевывает в решения или в уравнения Фридмана. Квантовые люди не могут получить эту константу из квантовой теории и объясняют её с помощью введения ещё одного гипотетического поля - «тёмной энергии» с удивительными свойствами вроде отрицательного давления. Так как мы не только обсуждаем классическую космологию, но и работаем в классической научной парадигме, которая крайне отрицательно относится к размножению сущностей, то такой свободы решений мы позволить себе не можем. Поэтому желательно объяснить ускорение расширения Вселенной в рамках уже принятого (единственного!) предположения о переменности гравитационной массы. Эта переменность прямо вытекает из трактовки ОТО, сделанной Эйнштейном после 1916 года: источником гравитационного поля не может быть энергия гравитационного происхождения, то есть нетензорная энергия самого гравполя и гравволн.

В статье 2016 года мы не строили космологию, то есть не получали уравнения Фридмана для сопутствующих наблюдателей, а рассматривали квази-шварцшильдовское решение для покоящегося наблюдателя. В этой модели отталкивающая сила, которая возникает при уменьшении гравитационной массы, со временем не исчезала, а только уменьшалась, что позволяло надеяться на то, что она как-то перейдет в космологическое уравнение Фридмана и объяснит ускоренное расширение. На этом основании мы даже позволили себе (как позже выяснилось – зря позволили) космологическое предположение в нашей по сути не космологической работе 2016 года о том, что наблюдаемое ускорение Вселенной будет уменьшаться со временем.

При построении новой космологии мы предвидели и трудности. Во-первых, отталкивающая сила в шварцшильдовой метрике сохранялась, только если Вселенная сбрасывала свою массу и больше не набирала её, а значит не могла снова сжаться. Это ставило под сомнение циклическую модель, оставляя нам только космологию одного отскока. Во-вторых, было непонятно, что делать с самой большой черной дырой, которая несомненно образовывалась в ходе слияния черных дыр при сжатии Вселенной предыдущего цикла. Эта дыра была неуничтожима и должна была только расти, поглощая как обычную материю, так и гравитационные волны. Она тоже не укладывалась в модель циклической Вселенной. Отмечу, что проблема самой Большой Черной Дыры для циклической модели эквивалентна проблеме роста энтропии, поднятой Толманом, потому что основная энтропия Вселенной содержится именно в этой дыре.

Ну, решили мы, бросаясь в космологию с головой, поживем – увидим. И действительно, пожили и увидели. Уравнения Фридмана можно получить нестрогим способом из ньютоновских уравнений, но строго, из эйнштейновских уравнений, они получаются непросто, с использованием исходной метрики Фридмана-Робертсона-Уокера. Мы стали исходить из того, что в этой метрике появилось малое возмущение в виде добавки из шварцшильдовской метрики с переменной массой. Процедура введения таких возмущений в метрику ФРУ хорошо отработана (см., например, учебник Дональдсона), но, в отличие от прежних вариантов, мы рассмотрели не мелкомасштабное возмущение, а крупномасштабное, шварцшильдовское. Расчеты получились очень сложными. Пришлось проверять их многократно, да еще и двумя способами (первый способ – всё долго и нудно делаем сами; второй быстрый способ основан на результатах, изложенных в параграфе 100 у Толмана). Рецензент MNRAS, кстати, оценил нашу кропотливость: а то многие норовят провести гравитационные выкладки с помощью специального софта!

Результат расчетов оказался впечатляющим: мы не закладывали руками феноменологическую космологическую постоянную в уравнения Эйнштейна, а исходили из классической версии этого уравнения, где этой постоянной нет. Но в результате вычислений в уравнении Фридмана появилась красивая величина из вторых производных от шварцшильдовского возмущения, которая оказалась эквивалентом космологической постоянной. Она является, конечно, не космологической постоянной, а космологической функцией и зависит от параметров шварцшильдовского возмущения – величины переменной массы и скорости её переменности. При вполне разумных предположениях оценка этой космологической постоянной прекрасно совпадает с наблюдаемым значением, определяемым из данных спутника «Планка».

Таким образом, в статье 2018 года были получены модифицированные уравнения Фридмана и аналитическое выражение для космологической постоянной, а также её числовая оценка, совпадающая по порядку величины с наблюдениями. Напомним, что результаты квантовых космологов по вычислению космологической постоянной, расходились с наблюдениями на 40-120 порядков. Так как мы работаем с возмущениями, то в предельном случае малых возмущений мы получаем уравнение Фридмана обычного вида, в котором феноменологическая космологическая константа неизвестной природы заменилась на аналитическую функцию от известных величин. То, что мы приходим к уравнению Фридмана обычного вида, означает, что наши вычисления в первом приближении согласуются со всеми данными современной наблюдательной космологии, основанными на уравнениях Фридмана и предположении об изотропности Вселенной. Но мы оставили в модифицированном уравнении Фридмана новый член следующего порядка, который может вносить свой вклад в анизотропные эффекты.

Вот сейчас мы можем всерьез поговорить со всеми нашими оппонентами о космологии (многие высказывали космологические претензии к нашей не космологической работе 2016 года, что попросту не по адресу). Отметим, что гравитационные волны как среда сами по себе не играют никакой роли в расширении Вселенной (поэтому никаких теорем, на которые так полагался Павел Иванов в критике нашей статьи 2016 года, мы не нарушаем). Причина её расширения и ускорения расширения лежит исключительно в крупномасштабном гравитационном поле – самой могучей силе для Вселенной. Но гравитационные волны играют важную роль в переменности гравитирующей массы, которая и генерирует нужные поля. Отметим, что решения в обеих статьях 2016 и 2018 года основаны на предположении о переменности гравитационной массы без детального обсуждения причин этой переменности.

Полученные уравнения ожидаемо откорректировали наши ожидания и опасения. Оказалось, что наблюдаемое ускоренное расширение Вселенной соответствует не уменьшению центральной массы, а её увеличению! Замечательный факт, открывающий дорогу к будущему сжатию Вселенной.
Это случилось из-за того, что в наших ожиданиях мы не учли принципиальную разницу между покоящимся шварцшильдовским наблюдателем и сопутствующими фридмановскими «летунами». Её можно понять, вспомнив, как восприятие мира отличается для человека, сидящего на стуле, и для человека, который падает в лифте. Первый думает, что он покоится, в то время как он испытывает постоянное ускорение от стула, а второй может думать, что он не в лифте, а висит где-то в невесомости космоса, в то время как он стремительно движется по геодезической к опасной поверхности Земли. Так же случилось и при переходе к фридмановским наблюдателям – они испытывают ускоренное относительное (!) разбегание друг от друга из-за усиления гравитационного влияния центральной переменной массы. Таким образом, мы пришли к удивительной интерпретации наблюдаемого (в сопутствующей системе) ускоренного расширения Вселенной, как результата роста центральной массы и торможения разлета Вселенной (с точки зрения покоящегося шварцшильдовского наблюдателя). Действительно, если по ночной дороге движется колонна автомобилей с включенными фарами, то факт, что задний автомобиль ускоренно отдаляется от переднего, можно с одинаковой вероятностью интерпретировать, как ускорение первого автомобиля, или как торможение последнего. И кто прав – сами локальные наблюдатели этого определить не могут, это решает только неподвижный светофор.

Не учитывая этих моментов, мы оказались неправы в своём предположении, что ускорение Вселенной будет уменьшаться. Сейчас это ускорение выражается несложной формулой, куда входят два параметра. Анализ поведения этих величин ещё предстоит сделать, но, по общим соображениям, можно предположить (с четким пониманием, что это очень предварительное предположение), что ускорение Вселенной может увеличиваться – и, видимо, именно в такой фазе расширения Вселенной мы живем. Вообще говоря, исследование новых уравнений возрожденной космологии (=модифицированных уравнений Фридмана) только началось – и они много расскажут интересного о том, как устроен мир.

Новая модель является сильнейшим аргументом в пользу природы тёмной материи как совокупности чёрных дыр и серьёзным предостережением для всех, кто собирается и дальше искать аксионы и прочие гипотетические элементарные компоненты темной материи.

Ещё один бесспорный и впечатляющий результат новой модели: у Вселенной есть центр! Нам долго говорили, что его нет, но его нет только для локально наблюдаемой Вселенной. Шварцшильдовская метрика имеет центр – и там располагается та самая Большая Черная Дыра (мы называем её BBH – Big Black Hole), которая образовалась при слиянии меньших дыр при сжатии Вселенной. Эта дыра пока «небольшая» (по нашим оценкам – порядка миллиарда световых лет) по сравнению с космологическими размерами и располагается на самом краю наблюдаемой части Вселенной, так что её можно почувствовать только по набору анизотропных космологических эффектов, которые систематически указывают в одном направлении. Куда они указывают – сейчас мы это понимаем. Именно быстрый рост BBH из-за поглощения фона гравитационных волн приводит к наблюдаемому «ускорению» расширения Вселенной (правильнее говорить о её дополнительном «растяжении»), а также внушает надежду на построение циклической модели Вселенной. Конечно, другие уцелевшие черные дыры тоже растут при проходе через сжатое состояние Вселенной, готовясь стать гравитационными центрами для формирования галактик и звездных скоплений нового цикла (это решает острую проблему раннего формирования квазаров и галактик и служит одним из главных аргументов для сторонников моделей отскока), но Большая Черная Дыра растёт безусловно быстрее всех за счет своей колоссальной поверхности.

Возрожденная классическая космология полностью свободна от гипотетических полей, от феноменологических космологических постоянных и тёмных субстанций. Отметим, что чёрные дыры, которые заменили «тёмную материю», никак не темны, а наоборот – хорошо знакомы и поддаются наблюдениям. Новая классическая космология существует как решение уравнений Эйнштейна, которые только применять надо с умом, вернее, с уважением к мнению Эйнштейна, Эддингтона и других легендарных знатоков ОТО. Вообще говоря, как только одно интерпретационное предположение в рамках ОТО приводит к решению сразу двух таких проблем как причина Большого Взрыва и механизм наблюдаемого ускорения Вселенной, то все споры от том, правильна ли эта модель или нет, должны заканчиваться - умному достаточно. Кто не понимает разницы между решением в рамках классической ОТО и модельками в рамках какой-нибудь многомерной квантовой гравитации – тому и объяснять бесполезно.

Сейчас стало понятно, что Вселенная никогда не была микроскопическим квантовым объектом, она имела минимальные размеры в несколько световых лет, то есть её диаметр был сопоставим с нынешним расстоянием до ближайших звёзд. Никаких сингулярностей при сжатии Вселенная не испытывает, потому что взрывчатка из черных дыр всегда обращает её движение вспять раньше сжатия в точку. Вселенная – вполне классический объект, и подчиняется она квантовым законам в такой же степени, как звёзды или галактики. Все многомерные и бесчисленные вселенные также накрылись медным тазом – прости, Голливуд и те, кто собирал урожай с этой полянки многомерной мульти-лапши.

Общей картине космологии отскока и циклической модели Вселенной будет посвящена третья статья, к которой мы уже приступили. В этой статье математики будет мало, за деталями она будет отсылать к двум первым работам. В новой статье будет решена проблема превращения расширения Вселенной в сжатие, а также проблема роста энтропии Вселенной и судьба Большой Черной Дыры.

Хочу еще раз со всей определенностью заявить – мы не изобретаем новую теорию гравитации и не строим новую космологию. Мы строго следуем эйнштейновской теории гравитации, а также берем хорошо разработанную и популярную космологию отскока 80-х годов и просто добавляем к ней набирающую популярность гипотезу о темной материи из чёрных дыр, что сразу дает отсутствовавшую пружину для Большого Взрыва и причину наблюдаемого «ускорения» Вселенной. Вот и всё, тема суперволшебной и суперквантовой космологии закрыта.

Все космологи доброй воли и трезвого ума сейчас могут вернуться в русло нормальной науки, где не надо ничего высасывать из пальца, а нужно просто решать уравнения Эйнштейна, который мудрее нас всех. А интереснейших задач в возрождённой классической космологии – море. Нужно верифицировать все старые решения, стыковавшиеся с наблюдениями (барионные осцилляции, спектр реликтового излучения, происхождение гелия и т.д.), строить теоретические модели анизотропных наблюдаемых эффектов, а также исследовать динамику всех компонент циклической Вселенной, которая всегда в движении.

Кстати, если вы – ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ гравитационист и/или космолог, который считает, что возрождённая классическая космология с переменной гравитационной массой достойна внимательного рассмотрения, как альтернатива квантовой космологии (заметьте – не истина в последней инстанции, в которую вы верите, а просто модель, которая, с вашей точки зрения, заслуживает анализа), то напишите мне. Я подумаю над декларативной статьей-обращением, под которой могли бы подписаться достаточно большое количество специалистов. Очевидно, что без серьёзного толчка паровоз квантовой космологии, свистящий на миллиард долларов в год, будет пыхтеть еще очень долго.

А сейчас, добро пожаловать в статью-2:

Monthly Notices of the ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY

MNRAS **476**, 1384–1389 (2018)
Advance Access publication 2018 February 9

doi:10.1093/mnras/sty335

# A modified Friedmann equation for a system with varying gravitational mass

Nick Gorkavyi★ and Alexander Vasilkov

*Science Systems and Applications, Inc., 10210 Greenbelt Rd., Lanham, MD 20706, USA*

Accepted 2018 February 2. Received 2018 January 26; in original form 2017 June 20

**ABSTRACT**

The Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) detection of gravitational waves that take away 5 per cent of the total mass of two merging black holes points out on the importance of considering varying gravitational mass of a system. Using an assumption that the energy-momentum pseudo-tensor of gravitational waves is not considered as a source of gravitational field, we analyse a perturbation of the Friedmann–Robertson–Walker metric caused by the varying gravitational mass of a system. This perturbation leads to a modified Friedmann equation that contains a term similar to the 'cosmological constant'. Theoretical estimates of the effective cosmological constant quantitatively corresponds to observed cosmological acceleration.

**Key words:** dark energy – cosmology: theory.

## 1 INTRODUCTION

An idea of a bouncing universe, where the Big Bang happens after the collapse of a previous universe, is actively investigated for last years (see, for example, Novello and Bergliaffa 2008; Cai et al. 2012; Brandenberger and Peter 2017). The bouncing cosmological models are free from a singularity, but have two other major problems: A physical cause of the Big Bang is unclear so far, as a cause for current acceleration of the Universe. Dynamics of matter and radiation in the bouncing cosmological models has been studied for long time (see e.g. Alpher and Herman 1949). High temperature $\sim 10^{10}$ K in the collapsed universe results in the complete destruction of nuclei of all chemical elements created in stars. Dicke et al. (1965) stated that 'the ashes of the previous cycle would have been reprocessed back to the hydrogen required for the stars in the next cycle'. Temperature of $10^{10}$ K means that the Universe was compressed by approximately $10^{10}$ times, i.e a size of the Universe was about 1–10 light-years. The high temperature of $10^{10}$ K of the collapsed Universe could produce a high level of isotropy observed in the Universe at the present time (Misner 1968; Hawking and Ellis 1973).

Recently, the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) Scientific Collaboration announced a detection of gravitational waves caused by the merger of two black holes with masses of about 36 and 29 times the mass of the sun (Abbot et al. 2016). About three times the mass of the sun, i.e. about 5 per cent of the initial total mass of the black holes, was converted into gravitational waves. Recently, an idea of the existence of numerous black holes with masses of 20–100 times the mass of the sun was suggested (Bird et al. 2016). Those massive black holes can serve as 'the dark matter' (Bird et al. 2016). Therefore, the black holes become an important component of cosmological models, particularly, of the bouncing cosmology because the black holes are the only macro object that can survive the Big Crunch and the Big Bang and appear in the next cycle of the Universe (Clifton, Carr & Coley 2017).

Studies of the cosmological dynamics with black holes, which have sizes up to the Hubble radius, were carried out in Quintin and Brandenberger (2016), Poplawski (2016), Chen et al. (2017), and Clifton et al. (2017). It is logical to hypothesize that the supermassive black holes of the centres of galaxies will be merged at final stages of the collapsing universe. For example, a simple estimate shows that $10^{11}$ supermassive black holes cannot be packed into a sphere with the radius being less than $\sim 0.1$ light-year. Thus, numerous mergers of black holes will occur in the collapsed Universe having a size of 1–10 light-years. This merging process will likely form a single black hole (Penrose 2011), or the biggest black hole (the big black hole or BBH) and a number of smaller black holes, which will not have sufficient time to merge and which will exist in the expanding universe after the Big Bang (Clifton et al. 2017). In the framework of this hypothesis, it is interesting to consider a generalization of the Friedmann–Robertson–Walker (FRW) metric for a perturbation caused by a gravitational field of the BBH. Whereas the homogeneous universe is characterized by a scalefactor, $a(t)$, which depends on time only, a universe perturbed by a variable gravitational mass is described by an inhomogeneous metric. Thus, the scalefactor can depend on space coordinates. Such inhomogeneous metrics were considered by Tolman (1934) and others (see e.g. Zel'dovich and Grishchuk 1984 and review of inhomogeneous cosmologies in Bolejko, Celerier, & Krasinski 2011).

During the Big Crunch, the total mass of black holes will reduce because they will lose a few percent of their mass at each act of the merging process. Black holes that survive the Big Crunch will

★ E-mail: gorkavyi@gist.us

increase their mass after the Big Bang due to absorption of matter and radiation including the background gravitational radiation. The BBH will increase its mass with the highest rate because it has the largest cross-section of absorption.

In 1998, the accelerated expansion of the Universe was discovered using observations of the distant supernovae (Riess et al. 1998; Perlmutter et al. 1999). An accelerating universe can be described by the Einstein equations with a phenomenological cosmological constant, $\Lambda$, which characterizes a repulsive force (Einstein 1952):

$$G_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{1}$$

where $G_{\mu\nu}$ is the Einstein tensor; $g_{\mu\nu}$ is the metric tensor; $T_{\mu\nu}$ is the energy-momentum tensor; and G is the gravitational constant. Data collected by the *Planck* satellite instrument allow us to get the following estimate of the cosmological constant (Ade et al. 2016a):

$$\Lambda \approx 1.1 \times 10^{-56}\,\mathrm{cm}^{-2}. \tag{2}$$

At present, cosmological models containing the cosmological constant are widely used to describe main observations: the cosmic microwave background, spectra of the baryonic oscillations, and the chemical composition of the early Universe (Misner et al. 1973; Fixsen et al. 1997; Mather and Boslough 2008; Ade et al. 2016a). A physical nature of the cosmological constant is unclear so far.

It is supposed that the repulsive force is caused by vacuum dark energy. A density of the dark energy, $\rho_{\mathrm{vac}}$, is related to the cosmological constant by the following equation: $\Lambda = 8\pi G\rho_{\mathrm{vac}}$ (see e.g. Carrol 2008). However, all attempts to calculate $\rho_{\mathrm{vac}}$ from the quantum theory bring to estimates, which exceed the observational data by 40–120 orders of the magnitude (Weinberg 1989; Carrol 2008).

The LIGO detection of the gravitational waves attracts the attention to consideration of a varying gravitational mass in the general theory of relativity. It is well known that the energy of the gravitational field cannot be described by the energy-momentum tensor in contrast to the energy of ordinary matter and electromagnetic field. The energy of the gravitational field also cannot be localized. Before 1917, Einstein supposed that the energy of gravitational field is equivalent to the energy of matter as a source of gravitational field and included the energy-momentum pseudo-tensor of gravitational field in the right-hand part of his equations. After famous discussion with Schrodinger, Bauer and other scientists, Einstein changed his opinion. Since 1917, he never included pseudo-tensor of gravitational field in his equations. Due to these circumstances, any contributions of purely gravitational origin or combinations from metric tensor may be excluded from the right-hand part of Einstein' equations or from a list of sources of a gravitational field by opinion, e.g. Einstein (1953), Eddington (1975), Chandrasekhar (1983), and Tourrenc (1997). This is kind of a non-standard approach accounting for energy of gravitational waves, but we follow Einstein's opinion: '$T_{ik}$ represents the energy that generates the gravitational field, but is itself of non-gravitational character (Einstein 1953). That means that the total gravitational mass of the Universe changes when a significant fraction of the mass of the black holes is converted into gravitational waves. An opposite process of increasing gravitational mass of the Universe is related to absorption of the background gravitational radiation by the BBH. In this paper, we consider cosmological effects of the variability of the gravitational mass caused by both conversion of the mass of merging black holes into gravitational waves and absorption of the background gravitational radiation by black holes.

Other ways for changing of the gravitational mass are possible (e.g. Kutschera 2003), but in this paper we will consider a variability of the gravitational mass in general form, without discussion of specific physical causes of such variability. Kutschera (2003) and Gorkavyi and Vasilkov (2016) got solutions of the Einstein equations for the varying gravitational mass of a quasi-spherical system. The solution found by Kutschera (2003) and Gorkavyi and Vasilkov (2016) is a modified Schwarzschild metric for the varying gravitational mass. Using a relativistic gravitational potential in the fixed coordinate system, Gorkavyi and Vasilkov (2016) derived an equation for a repulsive force (for a probe particle with a unit mass):

$$F = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{GM_0}{r}\mathrm{e}^{-\alpha(t-r/c)}\right] = -\frac{GM}{r^2} + \frac{\alpha}{c}\frac{GM}{r}. \tag{3}$$

The second term in equation (3) originates from the variability of a gravitational mass with a characteristic time $1/\alpha$ and the finite velocity of spreading of gravitational field disturbances:

$$M(t, r) = M_0\mathrm{e}^{-\alpha(t-r/c)}. \tag{4}$$

We will call this term $\alpha$-force. The $\alpha$-force is essentially relativistic because it depends on the light speed. Using a non-Einsteinian scalar–tensor theory, Galiautdinov and Kopeikin (2016) investigated gravitational forces caused by the variable gravitational constant. They also revealed a new force that is additional to the Newtonian attraction force.

Reduction of the gravitational mass of the collapsing Universe due to merging of the black holes causes the repulsive $\alpha$-force, which may be responsible for the Big Bang and accelerated expansion of the Universe at the initial stage (the analogy of the inflation period; Gorkavyi and Vasilkov 2016). It follows from equation (3) that the $\alpha$-force can be larger than the Newtonian term in case of the strong change of a gravitational mass, i.e. $\alpha \gg c/r$.

The model of the bouncing universe, which completely renews its chemical composition at the final contractive stage and explodes because of merging black holes, is based on the well-known physical concepts and does not involve new essences. But this model should provide an explanation of the current acceleration of the expanding Universe. This motivates a derivation of modified Friedmann equations that account for a perturbation of the Schwarzschild metric with a varying gravitational mass. A main question to this model can be formulated as follows: What rate of mass variability would it take to produce the currently measured acceleration attributed to the cosmological constant or dark energy? A focus of this paper is answering to this question.

The paper is structured as follows. In Section 2, we briefly describe how the classical Friedmann equations are derived from the Einstein equations. The modified FRW metric is discussed in Section 3. In Section 4, we consider the modified Friedmann equations for the case of a variable gravitational mass and make an estimate of the cosmological constant. We also interpret the result in terms of cosmological acceleration. The discussion is provided in Section 5. Conclusions are given in Section 6.

## 2 THE CLASSICAL FRIEDMANN EQUATIONS

To describe an expanding universe, the FRW metric is used. The classical Friedmann equation is derived from the Einstein equations assuming the FRW metric. According to this metric for a flat space, the time–space interval is expressed in the Cartesian coordinates as follows:

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left(\mathrm{d}x_*^2 + \mathrm{d}y_*^2 + \mathrm{d}z_*^2\right), \tag{5}$$

where $dr_*^2 = dx_*^2 + dy_*^2 + dz_*^2$ is the distance in the comoving coordinate system. The physical distance is related to the distance in the comoving coordinate system by the scalefactor $a$: $r = a(t)r_*$. The FRW metric describes an isotropic and uniform universe in the comoving coordinate system. At the present time, the scalefactor is equal to unity: $a(t) = 1$. Assuming that the matter has no pressure, i.e. $T_{00} = \rho c^2$, we get the first Friedmann equation from equations (1) and (5):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{8\pi G\rho}{3}. \tag{6}$$

To get the second Friedmann equation, let us differentiate equation (6) over time (Friedmann 1922; Liddle 2003):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{4\pi G\dot{\rho}}{3}\frac{a}{\dot{a}}. \tag{7}$$

## 3 A MODIFIED FRW METRIC

The Schwarzschild metric in the Cartesian coordinates for a weak gravitational field is written as

$$ds^2 = (1 - b_0)c^2dt^2 - (1 + b_0)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{8}$$

where $b_0 = 2GM_0/(rc^2)$ (e.g. Landau and Lifshitz 1975; Weinberg 1972, see equation 8.3.7 with the first-order terms in this reference). Here, we use the physical distance, $r$, in a fixed coordinate system. In the modified Schwarzschild metric derived in Kutschera (2003); Gorkavyi and Vasilkov (2016), the constant mass, $M_0$, is replaced with a variable mass $M(t, r)$. The equation (8) in the comoving coordinates transforms to

$$ds^2 = [1 - b(t, r)]c^2dt^2 - a^2(t, r)[1 + b(t, r)]\left(dx_*^2 + dy_*^2 + dz_*^2\right), \tag{9}$$

where $b(t, r) = 2GM(t, r)/(rc^2)$ is the known function and $a(t, r)$ is the unknown scalefactor. Such a perturbed metric was first derived in McVittie (1933). It was also used in Dodelson (2003, see equation 4.9). In equation (9), $b(t, r)$ can be considered as an analogy to the scalar potentials $2\Phi = -2\Psi$ in equation (4.9) in Dodelson (2003). This type of a metric was studied in detail in Kopeikin (2012).

According to Stephani et al. (2003), the metric (9) belongs to the type of spherically symmetric non-stationary metrics (see section 16.2 of the book by Stephani et al. 2003). Such a metric allows introduction of an isotropic comoving system of coordinates (equation 16.22 of section 16.2). Our modified Friedmann equations are derived for this system of coordinates.

The metric of equation (9) can be considered as a combination of two metrics: the Schwarzschild metric and the FRW metric. In an essence, it is a modified FRW metric with a scalar perturbation function. In this section, we will write the Einstein equation for a general type of the $b(t, r)$ function. In the specific case of $b(t, r) = 2GM(t, r)/(rc^2)$, we can hypothesize that the perturbation of the FRW metric is caused by a varying mass of a BBH, which is a final result of merging of many black holes and is located on the edge of the observed Universe. The centre of the coordinate system is located in the centre of the BBH, and we get a spherically symmetric physical system. But we prefer to explore this system in Cartesian coordinates. After we obtain the Friedmann equations for such a system, we can arbitrarily shift the initial point of coordinates.

We will assume an approximation of weak fields, i.e. $b(t, r) \ll 1$. That is why we will neglect non-linear combinations of this function. It should be noted that the time is not uniform in the Schwarzschild metric as it is the case in the FRW metric. We will neglect such non-uniformity of time because the non-uniformity of time is determined by the function $1 - b(t, r)$, which usually can be considered to be equal to unity. However, its derivatives should be accounted for in the derivation of the modified Friedmann equations. For the metric (9), we use the Einstein equations (1) without the term containing the cosmological constant.

## 4 THE MODIFIED FRIEDMANN EQUATIONS AND COSMOLOGICAL ACCELERATION

Let us derive modified Friedmann equations for the metric (9). We assume that the dependence of $a(t, r)$ on space coordinates is significantly weaker than that of $b(t, r)$. This assumption allows us to neglect all derivatives of $a(t, r)$ over the space coordinates as compared with those of $b(t, r)$. We validate this assumption a posteriori in the discussion section. Details of the derivation are provided in Appendix A, here we give just the final equations. The presence of the function $b(t, r)$ in the metric (9) results in a number of additional terms in the zero component of the Einstein equations. These terms contain second derivatives of the metric components over space coordinates. These additional terms can be considered as an effective 'cosmological constant', which can be called the 'cosmological function', $\Lambda(t, r)$, because it depends on time and space. For the case of weak gravitational fields, $b(t, r) \ll 1$, we get the first modified Friedmann equation in the form of

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{b} = \frac{\Lambda(t, r)c^2}{3} + \frac{8\pi G\rho}{3}, \tag{10}$$

where the cosmological function $\Lambda(t, r)$ is given by the following expression:

$$\Lambda(t, r) = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 b}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y_*^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial z_*^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2}\right). \tag{11}$$

We use a Cartesian system of coordinates only. The variable $r$ is not a coordinate; it is a distance between an observer and the BBH, which is calculated as $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, for example, Landau and Lifshitz (1975). The $r$ distance is actually a parameter that defines a value of the BBH perturbation at a given location. It should be noted that the cosmological constant that depends on time was considered in, for example, Weinberg (1989) and Szydlowski and Stachowski (2015). Inhomogeneous cosmological models with the scalefactor $a$, which depends on space coordinates, were considered in numerous papers (Tolman 1934, 1969; Zel'dovich and Grishchuk 1984; Bolejko et al. 2011). It is useful to note that the equation (11) is derived for a general form of the disturbing function $b(t, r)$. The scalar cosmological function $\Lambda(t, r)$ should not depend on a coordinate system. That is why we can calculate the cosmological function in any coordinate system: either comoving coordinates or physical coordinates of the fixed system of coordinates. A similar equation for a disturbed metric was earlier derived, for example, by Dodelson (2003, see equation 5.27) for density perturbations. In our case, the perturbation is related to a varying gravitational mass of the system. Note the difference between equation (5.27) of Dodelson (2003) and our equation (10). Equation (5.27) of Dodelson (2003) is written only for the perturbed quantities, and the zero-level approximation (the Friedmann equation for $a(t)$) is split off. We do not decompose the equation (10) into two approximation.

The smallness of function $b(t, r)$ does not mean that the terms with $b(t, r)$ will be smaller than terms with large fraction $a(t, r)$.

In case of exponential change of the gravitational mass (3), we get from equation (11) for $\alpha \gg c/r$

$$\Lambda(t, r) \approx \frac{\alpha^2}{c^2} b(t, r) = \frac{\alpha^2}{c^2} \frac{2GM(t, r)}{rc^2} = \frac{\alpha^2}{c^2} \frac{r_0}{r}, \tag{12}$$

where the Schwarzschild radius $r_0 = 2GM(t, r)/c^2$. It is logical to relate the $\alpha$ parameter to the time of the Universe existence after the Big Bang, $T$: $\alpha = f/T$, where $f$ is the dimensionless coefficient. $f = 1$ means that the BBH mass has changed by $e$ times since the Big Bang. Using the cosmological time, we get from equation (12):

$$\Lambda(t, r) = \frac{f^2}{c^2 T^2} \frac{r_0}{r} \approx 0.7 \times 10^{-56} f^2 \frac{r_0}{r} \tag{13}$$

(in $\mathrm{cm}^{-2}$), where $T \approx 4 \times 10^{17}$ s.

It should be noted that the term $\frac{\dot{a}}{a}\dot{b}$ in equation (10) is proportional to the exponent $\alpha$, whereas term $\Lambda(t, r)c^2/3$ is proportional the squared exponent $\alpha^2$. In the case of fast change of the gravitational mass, i.e. $f^2 \gg f$ or $f \gg 1$, the term $\frac{\dot{a}}{a}\dot{b}$ can be neglected and equation (10) concurs with the classical Friedman equation (6), where the cosmological constant is replaced by the cosmological function (11).

The second modified Friedmann equation is derived by differentiating equation (10) over time (for more details, see Appendix A):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda(t, r)c^2}{3} + \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{\ddot{b}}{2} + \frac{\frac{\dot{\Lambda}(t,r)c^2}{6} + \frac{4\pi G\dot{\rho}}{3}}{\sqrt{\frac{\Lambda(t,r)c^2}{3} + \frac{8\pi G\rho}{3}}}. \tag{14}$$

The quantity $\rho$ is the mean density of the observed Universe, whereas the terms with $\Lambda(t, r)$ and $\ddot{b}$ depend on a varying gravitational mass of the BBH located near the observed horizon. Using equation (12), we get $\ddot{b} = \Lambda(t, r)c^2$. Then equation (14) can be rewritten as

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\Lambda(t, r)c^2}{6} + \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\frac{\dot{\Lambda}(t,r)c^2}{6} + \frac{4\pi G\dot{\rho}}{3}}{\sqrt{\frac{\Lambda(t,r)c^2}{3} + \frac{8\pi G\rho}{3}}}. \tag{15}$$

The second modified Friedmann equation is quite similar to the classical equation (7), where the cosmological function $\Lambda(t, r)$ is given by (11).

Let us consider the case when the term with the cosmological function dominates the term with mean density of the Universe. Assuming an exponential change of the mass of the BBH (3), we get $\dot{\Lambda}(t, r) = \alpha\Lambda(t, r)$. Then, equation (15) transforms into the following equation:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\Lambda(t, r)c^2}{6} - \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\Lambda(t, r)c^2}{3}}. \tag{16}$$

Using equation (10), we get $\Lambda(t, r)c^2 = 3(H^2 + H\dot{b})$, where $H = \frac{\dot{a}}{a}$ is the Hubble constant. Then, equation (16) can be rewritten as follows:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}(H^2 + H\dot{b} + \alpha\sqrt{H^2 + H\dot{b}}) \approx -\frac{1}{2}(H^2 + \alpha H). \tag{17}$$

When we write the approximate expression, we assume that we can neglect the term $H\dot{b}$ as compared with others. It follows from equation (17) that acceleration for a comoving observer is positive $\ddot{a} > 0$ if $\alpha < -H$, that there is sufficiently fast increase of the gravitational mass of the BBH. It follows from equation (12) that the second term in the second Friedmann equation (16) depends on the distance to the BBH as a square root: $\sqrt{\Lambda(t, r)c^2/3} \propto \sqrt{r_0/r}$. The weaker dependence on the distance as compared with the first term results in prevailing the second term on large distances over the first term thus determining the dynamics of expanding of the Universe.

## 5 DISCUSSION

Equation (13) shows that the cosmological function is expressed through a dimensionless quantity $f^2 r_0/r$ composed of two parameters of our model $f$ and $r_0/r$. The cosmological function is equal to the observed value of the cosmological constant (2) if

$$f^2 \frac{r_0}{r} \approx 1.6. \tag{18}$$

Our basic assumption of weak gravitational fields means that $r_0/r \ll 1$, i.e. an observer is located far away from the BBH. Then, $f \gg \sqrt{1.6} \approx 1.3$. Assuming that a value of $f \sim 10$, we get from (18) the following estimate $r_0/r \sim 0.02$. If we assume that the distance, $r \sim 50$ billion light-years, i.e. the size of the Universe by the order of the magnitude (Davis and Lineweaver 2004), we get the following estimate of the radius of the BBH: $r_0 \sim 1$ billion light-years. This radius corresponds to the mass of the BBH of $\sim 6 \times 10^{54}$ gm.

Using equation (18), we can now validate our assumption of negligibly small derivatives of $a(t, r)$ over space coordinates as compared with those of $b(t, r)$, that is,

$$b'' \gg a'' \text{ and } b'' \gg b'a', \tag{19}$$

where the prime denotes a derivative over a space coordinate. The relationships of equation (19) can be estimated as follows:

$$\left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 \frac{r_0}{r} \gg \frac{1}{r^2} \text{ and } \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 \frac{r_0}{r} \gg \frac{\alpha}{c} \frac{r_0}{r} \frac{1}{r}. \tag{20}$$

Substituting equation (18) into equation (20), we obtain the following estimates:

$$\frac{1.6}{(cT)^2} \gg \frac{1}{r^2} \text{ and } \frac{f}{cT} \gg \frac{1}{r} \text{ or } \alpha \gg \frac{c}{r}. \tag{21}$$

The conditions of equation (21) are satisfied for $r \sim 50$ billion light-years (a size of the Universe) and $f = 10$.

There is an idea that a fraction of the black holes survives the stage of maximal contracting of the universe (Clifton et al. 2017). These relict black holes can produce the supermassive black holes in the galaxy centres and are responsible for the effects of 'dark matter'. This idea is in a qualitative agreement with our assumption about the existence of the BBH.

The first Friedmann equation (6) characterizes an isotropic and homogeneous model of the Universe. All locations of an observer are equivalent. It can be shown (McVittie 1956) that galaxies move away from each other similarly in all comoving coordinate systems with the same expansion rate defined by the Hubble constant. The modified Friedman equations with the cosmological function (11) are derived for two combined metrics: the basic FRW metric and the additional modified Schwarzschild metric. These metrics are considered in a single system of coordinates. If an observer moves to another coordinate system, the traditional terms of the Friedmann equations should not change; they are derived for the classical isotropic and homogeneous universe. However, the cosmological function $\Lambda(t, r)$ should change because it depends on a distance, $r$, from the origin of the Schwarzschild system of coordinates. The Schwarzschild metric is a kind of the anisotropic background for the shifted observer. Comparing the modified Friedmann equations with the classical ones, we conclude that the modified equations are valid for an observer at any location. However, the new cosmological term that depends on the distance from the BBH thus changes when the observer moves from one location to another. Thus, positive relative acceleration of observable galaxies is result of difference in deceleration of galaxies in non-stationary gravitational field of the BBH.

This paper is devoted to a mathematical solution of the Einstein equations for an expanding universe with a varying gravitational mass. This solution allows us to generalize the Friedmann equations for the varying gravitational mass. A consideration of observational cosmological aspects (CMB spectra, generation of large structures of the Universe, etc.) is beyond of the scope of this work.

## 6 CONCLUSIONS

We generalized the Friedmann equations for a model of the Universe with a varying gravitational mass. We managed to derive an expression for the cosmological constant directly from the Einstein equations. The model leads to the following conclusions:

(i) The modified Friedmann equation is equivalent to the classical Friedmann equations when the perturbation $b(r, t) \to 0$. This allows us to suggest that the modified Friedmann equations do not contradict to all observational cosmological effects. A major distinction of the modified Friedmann equations from the classical equations is that the modified equations give us an expression for the cosmological constant based on physical quantities that is derived from the Einstein equations. Estimates of the cosmological constant based on this expression give values that are quantitatively close to the observed value.

(ii) The cosmological principle of isotropy and homogeneity of the Universe is not universal. The Universe is isotropic and homogeneous locally only. Possible effects of anisotropy and inhomogeneity of the Universe can be observable for distant objects.

(iii) A disturbance of the FRW metric is caused by a very BBH located near the observed horizon of the Universe. The disturbance of the FRW metric results in an effective cosmological constant in the modified Friedmann equations. This effective cosmological constant is analogous to the dark energy term in the classical Friedmann equations. Estimates of this effective cosmological constant show that its value is close to observed cosmological constant by the order of magnitude, provided reasonable assumptions about the dimensionless parameters of the model have been made.

(iv) The observed positive acceleration of the expansion of the Universe corresponds to an increase of the gravitational mass of the BBH. In the future, this increase of the BBH can stop the expansion of the Universe and cause its collapse. We believe that a cyclic model of Universe can be developed on the basis of cyclic transformation of black holes, baryons, and electromagnetic and gravitation radiation.

Our conclusions are supported by a few observations that are related to anisotropic and inhomogeneous effects in cosmology (Erickcek, Carrol & Kamionkovski 2008; Stavrinos, Kouretsis & Stathakopoulos 2008; Hoftuft et al. 2009; Javanmardi et al. 2015; Zhao and Santos 2016; Ade et al. 2016b; Riess et al. 2016; Schwarz et al. 2016; Colin et al. 2017). Besides that, a change of the gravitational mass of the Universe could be verified by observations of the monopole component of non-stationary gravitational field. What would be the waveform of the monopole component, accompanying the detected transverse gravitational waves (Abbot et al. 2016)? The LIGO design is specifically aimed at the transverse waves, but perhaps the NANOGrav approach with the pulsar timing (Arzoumanian et al. 2015) might be sensitive to the monopole signal?

## ACKNOWLEDGEMENTS

The authors thank John Mather, Sergei Kopeikin, Alexey Bogomazov, Dmitry Makarov and anonymous reviewer for helpful discussions.

## REFERENCES

Abbot B. P. et al., 2016, Phys. Rev. Lett., 116, 061102
Ade P. A. R. et al., 2016a, A&A, 594, A13 , 1
Ade P. A. R. et al., 2016b, A&A, 594, A16 , 1
Alpher R. A., Herman R. C., 1949, Phys. Rev., 75, 1089
Arzoumanian Z. et al., 2015, ApJ, 810, 150
Bird S., Cholis I., Muñoz J. B., Ali-Haïmoud Y., Kamionkowski M., Kovetz E. D., Raccanelli A., Riess A. G., 2016, Phys. Rev. Lett., 116, 201301
Bolejko K., Celerier M.-N., Krasinski A., 2011, Class. Quantum Gravity, 28, 164002
Brandenberger R., Peter P., 2017, Found. Phys., 47, 797
Cai Y.-F., Easson D. A., Brandenberger R., 2012, J. Cosmol. Astropart. Phys., 08, 020
Carrol S. M., 2008, in Freedman W. L., ed., Why is the Universe Accelerating? In: Measuring and Modelling the Universe. Cambridge Univ. Press, Cambridge
Chandrasekhar S., 1983, The Mathematical Theory of Black Holes. Oxford Univ. Press, Oxford
Chen J.-W., Liu J., Xu H.-L., Cai Y.-F., 2017, Phys. Letters B, 769, 561
Clifton T., Carr B. J., Coley A., 2017, Class. Quantum Gravity, 34, 135005
Colin J., Mohayaee R., Rameez M., Sarkar S., 2017, MNRAS, 471, 1045
Davis T. M., Lineweaver Ch.H., 2004, Publ. Astron. Soc. Aust., 21, 97
Dicke R. H., Peebles P. J. E., Roll P. G., Wilkinson D. T., 1965, ApJ., 142, 414
Dodelson S., 2003, Modern Cosmology. Academic Press, San Diego
Eddington A. S., 1975, The Mathematical Theory of Relativity. Chelsea Publishing Co., New York
Einstein A., 1952, Cosmological Considerations on the General Theory of Relativity. In: The Principle of Relativity. Dover Publ., New York, p. 175
Einstein A., 1953, The Meaning of Relativity, 4th edn. Princeton Univ. Press, Princeton
Erickcek A. L., Carrol S. M., Kamionkovski M., 2008, Phys. Rev. D, 78, 083012
Fixsen D. J., Hinshaw G., Bennett C. L., Mather J. C., 1997, ApJ, 486, 623
Friedmann A., 1922, Z. Phys., 10, 376
Galiautdinov A., Kopeikin S. M., 2016, Phys. Rev. D, 94, 44015
Gorkavyi N., Vasilkov A., 2016, MNRAS, 461, 2929
Hawking S. W., Ellis G. F. R., 1973, The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge Univ. Press, Cambridge
Hoftuft J. et al., 2009, ApJ, 699, 985
Javanmardi B., Porciani C., Kroupa P., Pflamm-Altenburg J., 2015, ApJ, 810, 47
Kopeikin S. M., 2012, Phys.Rev. D, 86, 64004
Kutschera M., 2003, MNRAS, 345, L1
Landau L. D., Lifshitz E. M., 1975. The Classical Theory of Fields, Vol. 2, 4th edn. Butterworth-Heinemann, Oxford
Liddle A., 2003, An Introduction to Modern Cosmology. Wiley, Hoboken
Mather J. C., Boslough J., 2008, The Very First Light. Basic Books, New York
McVittie G. C., 1933, MNRAS, 93, 325
McVittie G. C., 1956, General Relativity and Cosmology. Chapman and Hall, London
Misner Ch., 1968, ApJ, 151, 431
Misner Ch., Thorne K., Wheeler J., 1973, Gravitation. Freeman & Co., San Francisco
Novello M., Bergliaffa S. E. P., 2008, Phys. Rep., 463, 127

Penrose R., 2011, An Extraordinary New View of the Universe. Knopf, New York
Perlmutter S. et al., 1999, ApJ, 517, 565
Poplawski N. J., 2016, ApJ, 832, 96
Quintin J., Brandenberger R. H., 2016, J. Cosmol. Astropart. Phys., 11, 029
Riess A. G. et al., 1998, AJ, 116, 1009
Riess A. G. et al., 2016, ApJ, 826, 56
Schwarz D. J., Copi C. J., Huterer D., Starkman G. D., 2016, Class. Quantum Gravity, 33, 184001
Stavrinos P. C., Kouretsis A. P., Stathakopoulos M., 2008, Gen. Relativ. Gravit., 40, 1403
Stephani H., Kramer D., Maccallum M., Hoenselaers C., Herlt E., 2011, Exact Solutions of Enstein's Field Equations, 2nd edn. Cambridge Univ. Press, Cambridge
Szydlowski M., Stachowski A., 2015, J. Cosmol. Astropart. Phys., 10, 066
Tolman R. S., 1934, PNAS, 20, 169
Tolman R. S., 1969, Relativity, Thermodynamics and Cosmology. Clarendon Press, Oxford
Tourrenc Ph., 1997, Relativity and Gravitation. Cambridge Univ. Press, Cambridge
Weinberg S., 1972, Gravitation and Cosmology. Wiley, New York
Weinberg S., 1989, Rev. Mod. Phys., 61, 1
Zel'dovich Ya.B., Grishchuk L. P., 1984, MNRAS, 207, 23P
Zhao W., Santos L., 2016, preprint (arXiv:1604.05484)

## APPENDIX A: DERIVATION OF THE MODIFIED FRIEDMANN EQUATIONS

Let us consider the Einstein equations (1) without the cosmological constant and derive the Friedmann equations for the disturbed FRW metric (9) with a function $b(t, r)$ assumed to be small. Thus, we neglect all the products of the Christoffel symbols that are proportional to the squared function $b(t, r)$. Elsewhere, we also neglect all terms that contain a non-linear combination of $b(t, r)$. The zero component of the Einstein equations is

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{00}. \quad \text{(A1)}$$

We can get the following expression for the zero-index component of the left-hand side of the Einstein equations (1) (see chapter 100 in Tolman 1969) :

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = &-\left(\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{c\partial t}\right)\left(\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{c\partial t}\right) \\ &-\left(\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{c\partial t}\right)\left(\frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{c\partial t}\right)-\left(\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{c\partial t}\right)\left(\frac{1}{2g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{c\partial t}\right) \\ &-g_{00}\left(\frac{1}{2g_{11}g_{22}}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_*^2}+\frac{1}{2g_{11}g_{33}}\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x_*^2}+\frac{1}{2g_{11}g_{22}}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y_*^2}\right. \\ &\left.+\frac{1}{2g_{22}g_{33}}\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial y_*^2}+\frac{1}{2g_{11}g_{33}}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial z_*^2}+\frac{1}{2g_{22}g_{33}}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial z_*^2}\right). \end{aligned} \quad \text{(A2)}$$

A combination of the second derivatives in (A2) is an effective cosmological constant, which can be named as the 'cosmological function' because it depends on time and spatial coordinate:

$$\begin{aligned} \Lambda(t, r) = &\frac{1}{2g_{11}g_{22}}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_*^2}+\frac{1}{2g_{11}g_{33}}\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x_*^2}+\frac{1}{2g_{11}g_{22}}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y_*^2} \\ &+\frac{1}{2g_{22}g_{33}}\frac{\partial^2 g_{33}}{\partial y_*^2}+\frac{1}{2g_{11}g_{33}}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial z_*^2}+\frac{1}{2g_{22}g_{33}}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial z_*^2}. \end{aligned} \quad \text{(A3)}$$

It should be noted that $g_{00} \approx -1$ in our approximation. Equalling (A2) to the zero-index component of the energy-momentum tensor, we get the following expression:

$$3\left[\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{\dot a}{a}\dot b\right] = \Lambda(t, r)c^2 + 8\pi G\rho. \quad \text{(A4)}$$

The terms on the left-hand side of equation (A4) are derived from the products of the derivatives over time in (A2). The additional term with $\dot b$ is significant at differentiating equation (A4) over time to derive the second Friedman equation. Solving equation (A4) with respect to the ratio, $\frac{\dot a}{a}$, we get the following expression:

$$\frac{\dot a}{a} = \pm\sqrt{\frac{\Lambda(t, r)c^2}{3}+\frac{8\pi G\rho}{3}+\frac{\dot b^2}{4}} - \frac{\dot b}{2}. \quad \text{(A5)}$$

The upper sign in equation (A5) and elsewhere corresponds to the case of an expanding universe (the Hubble constant is positive), and the bottom sign corresponds to a collapsing universe (the Hubble constant is negative). Squaring (A5), we get the first modified Friedmann equation:

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda(t, r)c^2}{3}+\frac{8\pi G\rho}{3}+\frac{\dot b^2}{2} \mp \dot b\sqrt{\frac{\Lambda(t, r)c^2}{3}+\frac{8\pi G\rho}{3}+\frac{\dot b^2}{4}}. \quad \text{(A6)}$$

To get the second modified Friedmann equation, let us differentiate equation (A5) with respect to time. Then, using equation (A6) we get the second modified Friedmann equation:

$$\frac{\ddot a}{a} = \frac{\Lambda c^2}{3}+\frac{8\pi G\rho}{3}+\frac{\dot b^2 - \ddot b}{2} \mp \frac{\frac{c^2}{3}(\dot b\Lambda - \frac{\dot\Lambda}{2}) + \frac{8\pi G}{3}(\dot b\rho - \frac{\dot\rho}{2}) + \frac{\dot b}{4}(\dot b^2 - \ddot b)}{\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}+\frac{8\pi G\rho}{3}+\frac{\dot b^2}{4}}}. \quad \text{(A7)}$$

For weak gravitational fields $b(t, r) \ll 1$, we can neglect all terms with $\dot b$ and $\ddot b$ except for the term $-\ddot b/2$. In this approximation, we get the second modified Friedmann equation in the form of equation (14) that is provided in the main text.

This paper has been typeset from a TEX/LATEX file prepared by the author.





P.S. Привожу цитаты из ссылок на Чандрасекара и Торренса. Цитату из Эйнштейна не привожу - она аналогична цитате из Торренса, заменил её высказыванием ТХоофта.

7. *Тетрадный формализм* 49

Геометрия пространства-времени описывается уравнениями Эйнштейна *

$$G_{ij} = R_{ij} - {}^1/_2 g_{ij} R = -(8\pi G/c^4)\, T_{ij}, \qquad (236)$$

где $T_{ij}$ — *тензор энергии-импульса* вещества и полей (кроме гравитационного), $G$ — гравитационная постоянная (которую, как

**Нобелевский лауреат**
**С. Чандрасекар**
**«Математическая теория черных дыр», 1986**

In general relativity, gravitation is described by the metric tensor and the matter distribution by the tensor $T^{\alpha\beta}$. The field equations of gravity are equations relating the metric tensor and the energy–momentum tensor. They are postulated in the manifestly covariant form

$$S^{\alpha\beta} = \chi \cdot T^{\alpha\beta} \qquad (6.4.5)$$

where $\chi$ is a constant and $S^{\alpha\beta}$ the Einstein tensor defined above (6.1.14).

These are **Einstein's equations**.

The identities (6.1.15), $S^{\alpha\beta}{}_{;\beta} \equiv 0$, then imply the conservation equations (6.4.4), without the necessity of postulating them separately. This great conceptual economy is an attractive feature of general relativity as a physical theory.

The energy–momentum tensor describes not only matter distributions but also fields of all kinds, such as the electromagnetic field for example. However,

the right hand side of Einstein's equations (6.4.5) excludes contributions of purely gravitational origin.

**Ph. Tourrenc**
**«Relativity and Gravitation»**
**Cambridge Univ. Press, 1997**

**Addendum 17 and 22 /3/2010:**

**I emphasize that any modification of Einstein's equations into something like $R_{\mu\nu} - 1/2\, R\, g_{\mu\nu} = \kappa( T_{\mu\nu\,(\mathrm{matter})} + t_{\mu\nu\,(\mathrm{grav})})$ where $t_{\mu\nu\,(\mathrm{grav})}$ would be something like a "gravitational contribution" to the stress-energy-momentum tensor, is blatantly wrong.** Writing such a proposal betrays a complete misunderstanding of what General Relativity is about. The energy and momentum of the gravitational field is completely taken into account by the non-linear parts of the original equation. This can be understood and proven easily, as I explained in the main text. Note that a freely falling observer experiences no gravitational field and no energy-momentum transfer; hence there cannot be a covariant tensor such as $t_{\mu\nu\,(\mathrm{grav})}$.

**Нобелевский лауреат**
**T'Hooft, 2010**