

2. (к § 5) Новый тип солитона со свойствами частицы
Enz U. *A new type soliton with particle properties.*
J. Math. Phys. 1977, т.18, № 3, 347-353.
(Филиппская исследовательская лаборатория Эдинбург
Нидерланды).

(Принята 12 июля 1976 года).

АННОТАЦИЯ

В статье описаны устойчивые полевые конфигурации двух
скалярных полей $\Theta(x, y, z, t)$ и $\mathcal{P}(x, y, z, t)$. Поле-
вые конфигурации следуют из простейшего принципа наименьше-
го действия, основанного на том, что плотность энергии есть
функция Θ , $\mathcal{P}$ и их первых производных. Описание Лоренцов-
ски-инвариантно. Структуры шнурового типа и характери-
зуются несколькими целыми числами. Показывается, что простей-
шие замкнутые шнуры описываются целыми $N = 1$; $N = 1$; $P =$
 $= \pm 1$ числами; они устойчивы. Структуры $P = 1$ и $P = -1$
связаны зеркальной симметрией. Три константы входят в основ-
ной принцип действия: длина ℓ , константа E с размерностью
энергии, времени, длины и безразмерный параметр γ . Все свой-
ства этих полевых конфигураций имеют дискретные значения:
что есть прямое следствие нелинейности основных выражений
для плотности энергии. Обращено внимание на идентификацию
этих структур с элементарными частицами, электроном и позитроном
в простейшем случае $P = 1$ и $P = -1$. С этой целью,
полная энергия полевых структур приравнивается остаточной
энергии частиц. Константы E , ℓ и γ связаны с фундаменталь-
ными физическими константами h, m, c . Модель представляет
классические полевые структуры с квантовыми свойствами.

ВВЕДЕНИЕ

В этой статье делается попытка найти уравнения, описывающие стабильные, свободные от сингулярностей полевые конфигурации в трёхмерном пространстве. Полевые конфигурации могут быть применены таким образом, что полевые величины, имеющие большое, но конечное значение и высокие плотности энергии, оказываются в ограниченной пространственной области, скажем, внутри сферы радиуса R , и спадают к нулю на расстояниях $r \gg R$ от этой области. Классическое поле, введённое здесь, имеет простое геометрическое значение и управляется нелинейными уравнениями, выведенными из принципа наименьшего действия. Вообще поля не идентичны с известными физическими полями, но может быть, однако, сделана попытка идентификации в определённых предельных случаях. Процедура заключается прежде всего во введении этого поля, исследования устойчивости решений, и потом идентификация его асимптотических частей с физическими полями. Основная цель заключается в идентификации структуры, описанной этим способом с устойчивой элементарной частицей. В такой классической структурной теории поля нет возможности для отдельных значений поля и частицы. Поле рассматривается, как имеющее фундаментальную сущность, частица есть локализованное распределение поля. Мотив исследования в такой теории был дан много ранее⁽¹⁻³⁾. Теория основана на предположении плотности энергии, зависящей от двух реальных скалярных полевых переменных Θ и φ и их первых производных по четырёхмерным координатам x, y, z, t .

Поля Θ и φ имеют характер угловых переменных во вспомогательном евклидовом пространстве трёх измерений U_i . Эти предположения есть обобщение ранней попытки получить дискретные свойства частицы в теории, имеющей дело с одним полем Θ . Настоящая статья сначала повторяет результаты этого простого случая и потом излагает обобщение на два скалярных поля, и, наконец, описывает физическую интерпретацию.

Одинокое скалярное поле

Когда имеют дело с одиноким полем Θ , принцип наименьшего действия вводится следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial W &= 0 \\ W &= \int \left\{ K \sin^2 \Theta + A \left[(\nabla \Theta)^2 - C^{-2} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} dx dy dz dt \end{aligned} \quad (I)$$

Это выражение было найдено путём развития тесной концептуальной и формальной аналогии между движущимися границами областей в магнитных кристаллах и движущимися частицами. Поле $\Theta(x, y, z, t)$ визуализируется как угол во вспомогательной плоскости U_1, U_2 и описывает направление единичного вектора "n" в этой плоскости. Член

$K \sin^2 \Theta$ описывает анизотропию в плоскости U_1, U_2 и должен быть взят в этой форме для простоты. Члены более высокого порядка $K_i \sin^{2i} \Theta$ могут быть добавлены. Постоянные A и K имеют размерности энергии на единицу длины и плотности энергии соответственно, и "C" есть скорость света. Уравнение Эйлера, соответствующее (I), читается так:

$$\square \Theta = (K/2A) \sin 2\Theta \quad (2)$$

Мы сначала ограничиваемся пространственно подобными координатами, предполагая $\theta = \theta(x, t)$. Этот случай был изучен независимо с разных точек зрения Перрингом и Скирмом⁵ и вызвал большой интерес в последние годы, так как ведёт к специальному классу солитонных решений.⁶⁾

Решение (2) есть

$$\sin \theta = \pm (\cos h \bar{x} / \bar{\chi})^{-1} \quad (3)$$

$$c \bar{X} = X - Vt, \quad \chi_0 = \pi \left(\frac{A}{K} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{1/2}, \quad (4)$$

где: V есть постоянная скорость $< c$

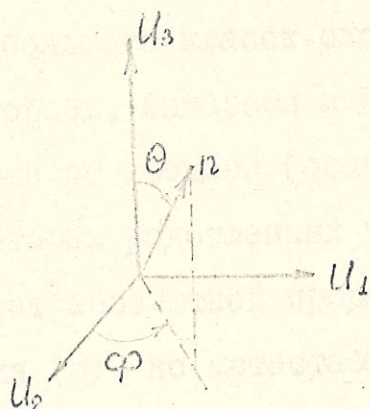
Это решение представляет устойчивую полевую конфигурацию или объект с внутренней структурой, движущийся со скоростью V вдоль оси X . Внутри пространственно-подобной области порядка величины χ_0 на оси X угол θ изменяется от $\theta = 0$ до $\theta = \pi$, описывая вращение по часовой стрелке или против часовой стрелки вектора "n" на угол $\pm \pi$. Инвариант $\pm \pi$ — топологической природы и может быть поэтому приписан к структуре (3). Наибольшая энергия, связанная с (3), концептируется в области χ_0 . В остаточной системе ($V = 0$) структура характеризуется дискретной поверхностной плотностью энергии

$$E_s = 4(AK)^{1/2}, \quad (5)$$

соответствующей дискретной массовой плотности:

$$m_s = \frac{E_s}{c^2} \quad (6)$$

и длины $\ell_0 = \pi \left(\frac{A}{K} \right)^{1/2} \quad (7)$



Фиг. I

Определение угловых переменных θ и φ как полярного и азимутального углов, определяющих направление единичного вектора n в пространстве u_1, u_2, u_3 .

Решение может быть визуализовано, как бесконечный цилиндрический лист, ориентированный параллельно $y - z$ плоскости с массовой плотностью (6) и толщиной (7). Появление дискретных величин есть прямое следствие нелинейности (2). Структура, обсуждаемая до сих пор, может рассматриваться, как "одномерная устойчивая частица". Эта модель частицы обнаруживает свойства, общие с обычной реальной частицей: дискретная масса, длина ℓ_0 , которая может быть рассмотрена, как элементарная длина, и инвариант $\pm \hbar$. Описание Лоренцовски инвариантно и свободно от сингулярностей. Возникает вопрос, может ли уравнение (2) иметь сходные решения, описывающие локализованные устойчивые поля в трёхмерном пространстве. Тем не менее, как это было показано Дерриком, устойчивые независимые от времени

решения (2), не существуют в трёх измерениях. Это сохраняется тем более для большого класса сходных нелинейных уравнений.⁽⁷⁾ С другой стороны, Андерсен и Деррик показали, что стабильные, зависящие от времени (осциллирующие) решения существуют для некоторых родственных уравнений. Этот тип стабильности не имеет абсолютной природы топологической стабильности решения (3), но метастабилен в смысле, что он разрушается при достаточно больших возмущениях. В ближайшем разделе мы опишем приближение, которое ведёт к топологической устойчивости полевой конфигурации в трёх измерениях.

Решения для двух скалярных полей θ, φ

В этом разделе мы рассматриваем единичный вектор "n" в дополнительном Евклидовом пространстве трёх измерений

U_i . Направление "n" определяется углом θ и азимутальным углом φ (фиг. I). $\theta(x, y, z, t)$ и $\varphi(x, y, z, t)$ рассматриваются как два реальные скалярные поля в физическом пространстве.

Таким образом, физическое пространство планируется в сфере радиуса I с центром в начале координат вспомогательного пространства. По аналогии с (I) принцип наименьшего действия постулируется:

$$\partial W = 0,$$

$$W = \int (K \sin^2 \theta + A D_0 + E D_0^2) d^4 x \quad (8)$$

где: D_0 введено для сокращения:

$$D_0 = [(\nabla \theta)^2 - c^2 \theta_t^2] + \sin^2 \theta [(\nabla \varphi)^2 - c^2 \varphi_t^2] \quad (9)$$

Оператор ∇ изображает градиент в трёх пространственно подобных координатах. Константы "К" и "А" имеют то же самое значение (и размерность), как и ранее. Член AD_0 описывает плотность энергии, связанную со скоростью изменения направления "n". Квадратичный член ED_0^2 должен быть прибавлен, в соответствии с добавочной плотностью энергии для высоких скоростей изменения θ и φ . Введение этого члена есть простейший путь обеспечить стабильность, как будет ясно из следующего раздела. E есть константа с размерностью энергия, время, длина. Константы К, А, Е определяют характеристическую длину:

$$\ell = (E/K)^{1/4} \quad (10)$$

и безразмерную константу

$$\gamma = EK/A^2 \quad (11)$$

Другие длины могут быть сконструированы с помощью " ℓ " и " γ ", например, длина ℓ_0 (7), которая эквивалентна $\pi \gamma^{-1/4} \ell$. Если все длины выражены в единицах, уравнение (8) может быть записано в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \partial \dot{W} &= 0; \\ W &= \frac{E}{c} \int (\sin^2 \theta + \gamma^{-1/2} D + D^2) d^4 \xi \end{aligned} \quad (12)$$

где: $D = \ell D_0$

Предположения (8) и (9) характеризуют основные свойства пространства; может быть показано, что они ведут к стабильным полевым конфигурациям типа, описанного во введении.

Уравнения Эйлера, соответствующие принципу минимума, дважды связанные, нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка для двух скалярных функций θ и φ . Уравнения читаются так:

$$2(\tilde{r}^{1/2} + 2D) \square \theta + 4(\nabla \theta \nabla \varphi - \theta_z D_z) - \\ - \left\{ 1 + (\tilde{r}^{-1/2} + 2D) [(\nabla \varphi)^2 - \varphi_z^2] \right\} \sin 2\theta = 0; \quad (13)$$

и

$$[(\tilde{r}^{-1/2} + 2D) \square \varphi + 2(\nabla \varphi \nabla D - \varphi_z D_z)] \sin \theta + \\ + 2[(\tilde{r}^{-1/2} + 2D)(\nabla \varphi \nabla \theta - \varphi_z \theta_z)] \cos \theta = 0,$$

$$\text{где } \tau \equiv \frac{tc}{\ell}.$$

Не стоит пытаться решить это уравнение в общем виде, но мы покажем, что простые решения, имеющие цилиндрическую симметрию, могут быть найдены. Для этой цели мы введём приведенные цилиндрические координаты $\rho, \varphi, \zeta, \tau$ с $X = \ell \rho \sin \varphi$; $y = \ell \rho \cos \varphi$; $z = \ell \zeta$ и запишем:

$$D = (\theta_\rho^2 + \rho^{-2} \theta_\varphi^2 + \theta_\zeta^2 - \theta_\tau^2) + \sin^2 \theta (\varphi_\rho^2 + \rho^{-2} \varphi_\varphi^2 + \\ + \varphi_\zeta^2 - \varphi_\tau^2); \quad (15)$$

Мы предполагаем $\varphi = \pm \frac{1}{2} L \varphi$, где: " L " есть целое число и $\theta = \theta(\rho)$, то есть θ есть функция только координаты ρ . Неточность величин ("знака") L разрешима, так как основной принцип действия (8) остаётся неизменным, если " n " заменить на $-n$. Здесь, тем не менее, мы предполагаем $L = 2$ для простоты, так что мы имеем $\varphi = \varphi$.

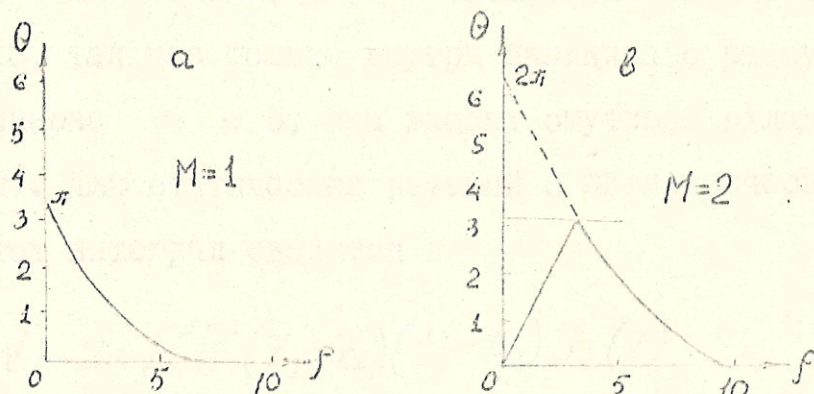
Уравнение (I4) удовлетворяется этими специальными формами полей, и выражение (I5) сводится к форме:

$$D = \Theta_p^2 + \bar{\rho}^{-2} \sin^2 \Theta. \quad (I6)$$

Из уравнения (I3) мы тогда найдём следующее уравнение 2-го порядка.

$$\begin{aligned} \Theta_{pp} = & \left(1 + 6\gamma^{1/2} \Theta_p^2 + 2\gamma^{1/2} \bar{\rho}^{-2} \sin^2 \Theta \right)^{-1} \times \\ & \times \left\{ \sin 2\Theta \left(\frac{1}{2} \gamma^{1/2} + \frac{1}{2} - \gamma^{1/2} \Theta_p^2 + \gamma^{1/2} \bar{\rho}^{-2} \sin^2 \Theta \right) - \right. \\ & \left. - \left[1 + 2\gamma^{1/2} (\Theta_p^2 - \bar{\rho}^{-2} \sin^2 \Theta) \right] \bar{\rho}^{-1} \Theta_p \right\} \end{aligned} \quad (I7)$$

Фиг. 2



Решение $\Theta = \Theta(\rho)$ для устойчивой полевой конфигурации с цилиндрической симметрией (а) $M=1$, (б) $M=2$. Пунктирная кривая: численное решение для $\Theta(0) = 2\pi$. Сплошная кривая: решение с собственным граничным уравнением $\Theta(0) = 0$. Решения зависят от безразмерного параметра γ . В обоих примерах $\gamma = 1$.

Это уравнение может быть решено численно. Из уравнения (16) видно, что для решений, свободных от дивергенций, граничное условие для $\rho = 0$ даётся равенством $\sin \theta = 0$ или $\theta = M\pi$, где M есть целое. Мы полагаем дальнейшее граничное условие $\theta = 0$ для $\rho \rightarrow \infty$. Предполагая $\gamma = 1$, мы найдём для $M = 1$ решение, показанное на фиг. 2(a). Первая производная в начале координат есть

$\theta_\rho(0) = -0,9205$. Это решение образует устойчивую поле-вую конфигурацию, которая уходит в бесконечность в направлении оси Z . Стабильность есть топологический ^{его} тип и ^{это} является родственным факту, что φ изменяется на 2π на каждом элементарном отрезке пути, пройденном в единицу времени вокруг оси Z .

Поле $\theta(\rho)$ имеет величину π на оси Z и быстро спадает к нулю с возрастанием ρ . Безразмерная плотность энергии $\sin^2 \theta + D + D^2$ быстро уменьшается, как видно из фиг. 3, так что только внутри цилиндра с радиусом, равным примерно $\rho = 5$, она вносит ощутимый вклад в интеграл (12). Для статических решений с цилиндрической симметрией этот интеграл сводится к

$$W = 2\pi \sqrt{EK} (z_1 - z_0)(t_1 - t_0) \mathcal{I}_1(\gamma) \quad (18)$$

$$\mathcal{I}_1(\gamma) = \int_0^\infty (\sin^2 \theta + \gamma^{-1/2} D + D^2) \rho d\rho, \quad (19)$$

где: $z - z_0$ и $t - t_0$ интервалы интегрирования по осям Z и t соответственно. $\mathcal{I}_1(\gamma)$ есть безразмерный интеграл, который представляет собой меру энергии на еди-

нипу длины структуры на оси Z . Он содержит γ^* . В настоящем примере, с $\gamma^* = 1$, мы находим $\mathcal{I}_1(\gamma^*) = 12,9$. Для $\gamma \ll 1$, интеграл асимптотически приближается к величине $\mathcal{I}_1(\gamma) = \frac{3,93}{\gamma}$. Все эти свойства ведут к интуитивной картине, что решение (17) может рассматриваться как устойчивый цилиндр или шнур с боковыми размерами несколько единиц ℓ . Ориентировочная ось шнура в пространстве произвольная, обязанная симметрии и свойств D . Кроме простого решения, описанного выше, можно найти численные решения для $M > 1$. Определённые интегралы $\mathcal{I}_M$ связываются с этими решениями.

Если θ определён как полярный угол с границами $0 \leq \theta \leq \pi$, собственное граничное условие есть $\theta(0) = 0$ для $M = 1$ и $\theta(0) = \pi$ для $M \neq 1$. Решения состоят из M сегментов (или оболочек) $0 \leq \theta(p) \leq \leq \Delta\pi$ с альтернативно положительным или отрицательным наклоном θ_p . Для сегментов с $\theta_p > 0$ мы имеем $\varphi = \psi + \pi$ и для сегментов с $\theta_p < 0$ мы имеем $\varphi = \psi$. Фиг.2(в) даёт решения для $M = 2$ с $\theta_p(0) = 1,302$. Здесь может быть упомянуто интересное свойство решений $\theta(p)$ уравнения (17). Это уравнение может быть записано в форме

$$\theta_{pp} + (1/p) \theta_p = f(p, \theta, \theta_p) = \epsilon(p) \quad (20)$$

и может быть ^{про}интегрировано как уравнение Пуассона, основанное на функции плотности $\epsilon(p)$.

Эта плотность однозначно определяется решениями $\Theta(\rho)$ уравнения (17). Что $\Theta(\rho)$ экспоненциально уменьшается при больших ρ , следует непосредственно из теоремы Дирихле:

$$\int_0^{\infty} \Theta(\rho) \rho d\rho = 0 \quad (21)$$

Численное решение (17) удовлетворяет этому условию. Шнур может быть таким образом рассмотрен с помощью приближения Ритца. Точное решение на фиг. 2(a) ($M=1$) тогда заменится на решение $\Theta = \pi - a\rho$ в интервале $0 \leq \rho \leq \pi a^{-1}$ и на $\Theta = 0$ для $\rho > \pi a^{-1}$. Уравнение (16) тогда читается так:

$$D = \rho^{-2} \sin^2 a\rho + a^2 \quad (22)$$

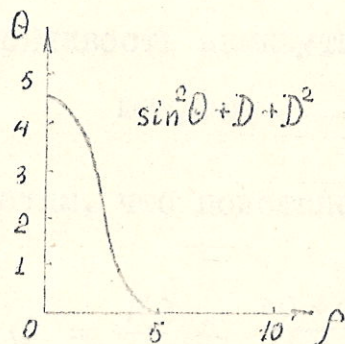
Используя элементарные интегралы, мы получим для интеграла

$\mathcal{I}_1(\epsilon \rho=1)$ величину:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \sin 2\pi + a^2 \left(\frac{1}{2} \pi^2 + \sin 4\pi \right) + \\ & + \frac{1}{4} a^{-2} \pi^2 \end{aligned} \quad (23)$$

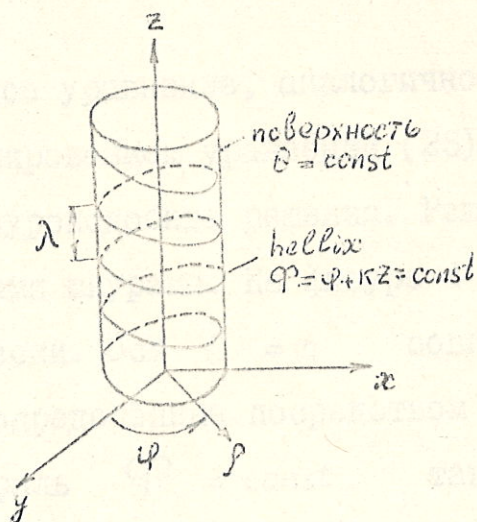
которая получает минимальное значение $= 15,07$, для $= 0,744$. Эта величина интеграла не сравнивается неразумно с точным результатом 12,9. Это даёт указание точности сходных аппроксимаций, которые могут быть сделаны ниже для более сложной полевой структуры. Заклучая этот раздел, мы замечаем, что введение двух угловых переменных ведёт по крайней мере к одной стабильной полевой конфигурации шнуроподобного типа. Этот результат можно сравнить со случаем (I) одиночного скаляра Θ , который ведёт к устойчивой планарной структуре бесконечного измерения. Если

ввести три угловые переменные, представляющие Эвклидовы углы в четырёхмерном пространстве U_4 , которые управляются принципом действия аналогичном (8), получаются локализованные полевые структуры со сферической симметрией. В этой структуре $\Theta = f$ ограничено в единственной точке. Скирме⁹ был первым, кто описал решение, эквивалентное этой точкообразной структуре. Шнуроподобная структура имеет некоторые сходства с дисклинацией в нематодном жидком кристалле¹⁰⁾. Суммируя, мы замечаем, что введение одной, двух или трёх угловых переменных ведёт к устойчивым структурам планарной, шнурообразной и точкоподобной формы соответственно. Наши дальнейшие рассмотрения будут основываться на шнурообразных структурах:



Фиг. 3

Плотность $\sin^2 \Theta + D + D^2$ как функция приведенной цилиндрической координаты $f, \gamma = 1$.



Фиг. 4

Скрученный шнур с поверхностью $\Theta = \text{const}$
(цилиндр) и кривая $\varphi = \text{const}$ (спираль).

Устойчивость замкнутых скрученных шнуров

Сначала заметим, что подстановкой

$$\varphi = \psi = \frac{\kappa z}{\ell} \pm \frac{\omega + c}{\ell} \quad (24)$$

и, предполагая независимость от времени функции $\Theta = \Theta(\rho)$,
может быть найдено немного более общее решение, чем (I6).

Перепишем λ на оси Z , определяемый из равенства

$\kappa = \frac{2\pi\ell}{\lambda}$, и вращение вектора "n" с постоянной безраз-
мерной угловой частотой ω описываются таким образом.

Уравнение (I4) удовлетворяется вышеупомянутым выбором φ и
 Θ .

Уравнение (I5) тогда запишется следующим образом:

$$D = \Theta^2 \rho^2 + \sin^2 \Theta (\rho^{-2} + \kappa^2 - \omega^2) \quad (25)$$

$$= \quad (25)$$

Дифференциальное уравнение, аналогичное (17), может быть найдено комбинированием уравнений (25) и (13), которые снова имеют шнуроподобные решения. Решения с $K \neq 0$ называют скрученными шнурами. На фигуре 4 скрученный шнур нарисован схематически. Ось $\theta = \pi$ совпадает с осью z и поверхности, определённые посредством $\theta = \text{const}$, есть цилиндры. Спираль $\varphi = \text{const}$ также указана.

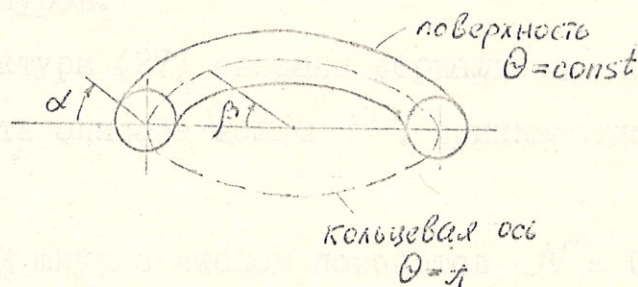
Если ту же самую аппроксимацию Ритца ($\theta = \pi - a\rho$) применить к завитому шнуру, мы получим для интеграла (12):

$$\begin{aligned} W = & \frac{E}{c} 2\pi (\xi_1 - \xi_0) (\tilde{\tau}_1 - \tilde{\tau}_0) \left[\frac{\pi^2}{2} \tilde{r}^{-1/2} + \frac{\sin 2\pi}{2} \tilde{r}^{-1} + \right. \\ & + \left(\frac{\pi^2}{2} + \sin 2\pi - \frac{1}{4} \sin 4\pi \right) (K^2 - \omega^2) + \\ & + \tilde{a}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{4} \tilde{r}^{-1/2} \right) (K^2 - \omega^2) + \frac{3\pi^2}{16} (K^2 - \omega^2)^2 + \\ & \left. + \tilde{a}^2 \left(\frac{\pi}{2} + \sin 4\pi \right) \right]; \quad \xi = \frac{z}{c}; \quad \tilde{\tau} = \frac{e\tau}{c}. \end{aligned} \quad (26)$$

Для больших величин ($K^2 - \omega^2$) структура скрученного шнура модифицируется в сравнении с нескрученным шнуром в том смысле, что боковые размеры уменьшаются и полный минимум энергии возрастает. Здесь делается переход к более качественному рассмотрению. Шнур теперь изображается как объект, который может гнуться без потери его топологической структуры, и, для умеренной кривизны, без заметного изменения энергии на единицу длины.

Для планарного решения равенства (2) (стены Блоха) соответствующий переход общеупотребителен. II

Теперь рассмотрим замкнутые шнуры, для которых ось, определённая равенством $\Theta = \pi$, образует замкнутую линию. Это сделаем с помощью Фиг. 5.



Фиг. 5

Эскиз замкнутого шнура. Показывается тор, определяемый равенством $\Theta = const$.

Ось шнура есть круг радиуса R , угол β вводится для определения точки на этой оси. $R\beta$ соответствует координате Z прямого шнура. Далее, угол α вводится для определения угловой координаты, соответствующей углу прямого шнура.

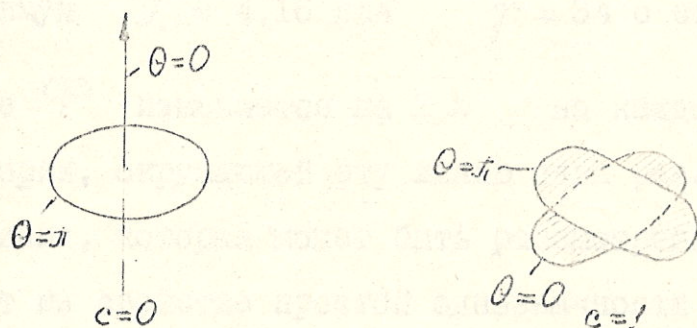
Два множества структур могут быть определены равенством:

$$\varphi = N\beta \pm \alpha, \quad (27)$$

где $N = \frac{2\pi R}{\lambda}$ есть целый указатель числа полных, на 2π , поворотов по окружности шнура. Условие $\Theta = const$ определяет поверхности, топологически эквивалентные торам, как показано на фигуре 5. Два множества структур (27) могут быть названы правым и левым замкнутыми скрученными шнурами. Пространственные распределения Θ и φ для этих структур следуют в принципе из уравнений (I3) и (I4). Тем не менее численное решение этих уравнений для этой трёхмерной поле-

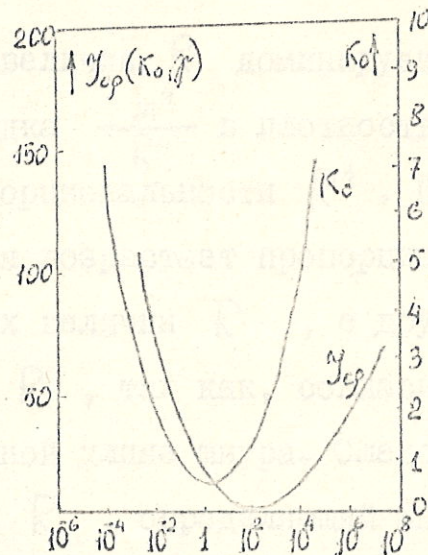
вой конфигурации есть математическая проблема, которая до сих пор не имеет решения. В последующем мы приведём некоторые рассмотрения качественной природы, касающиеся свойств замкнутых шнуров.

- а) Две структуры (27) связаны зеркальной симметрией, которая может быть описана целым P , принимающим значения $+1$ или -1 .
- б) Замкнутый шнур с числом поворотов $N = 0$ — незакрученный замкнутый шнур есть неустойчивый.
- в) Непрерывная линия, определяемая равенством $\theta = 0$ (или в более общем случае, $\sin \theta = 0$), проходит через замкнутый шнур $N = 1$.



Фиг. 6

Две структуры, обозначенные $C = 0$ и $C = 1$. Линия, определяемая равенством $\theta = 0$ есть прямая линия ($C = 0$) и замкнутая кривая ($C = 1$).



Фиг. 7

Интеграл $\mathcal{Y}_{cs}(K_0, \gamma)$ есть мера для минимума полной энергии замкнутого шнура $L = 2$; $N = M = 1$, $C = 0$ как функция γ . Кривая имеет минимум $\mathcal{Y}_{cs} = 4,16$ для $\gamma = 34$ с соотв. $K_0 \approx 1$.

Поле φ изменяется на 2π на каждой замкнутой траектории, окружающей эту линию один раз. Присутствие этой линии, которая может быть рассмотрена как шнур $\Theta = 0$, следует из свойства простой однозначности поля φ во всех точках, исключая те, где $\Theta = 0$. Шнур $\Theta = 0$ есть по-этому устойчивая сущность того же самого вида, как замкнутый шнур $\Theta = \pi$, обсуждаемый ранее. В структуре, обозначенной $C = 0$, в фиг. 6 этот шнур $\Theta = 0$ представлен как прямая линия.

г) Следующий аргумент показывает, что замкнутый шнур $N = 1$ устойчив. Обязанное свойству (C), $\nabla \Theta$ есть порядка π/R внутри замкнутого шнура.

Для малых величин R доминирует член ED_0^2 , дающий вклад порядка $\frac{\pi^4}{R^4}$ в плотность энергии, в то время как объем пропорциональности R^3 . Поэтому для $R \rightarrow 0$ полная энергия возрастает пропорционально $\frac{1}{R}$.

Для больших величин R , с другой стороны, энергия пропорциональна R , так как, согласно (26) энергия пропорциональна полной длине шнура. Следовательно это есть наименьший радиус R_0 , определяющий шнур минимальной энергии.

Этот аргумент имеет значение для статики, так же как для временной зависимости решений для Θ .

Это проясняет, почему необходимо введение члена ED^2 в принцип действия (8).

д) Грубо говоря, энергия замкнутого шнура может быть вычислена, начиная с уравнения (26) и предполагая, что замкнутый шнур есть окружность, имеем $2\pi R = N\lambda$ и поэтому $\xi_1 - \xi_2 = 2\pi \frac{N}{K}$. (28)

Слагаемым членом, следующим из конечности кривизны шнура пренебрегаем. Для логичности дальнейшего описания мы предположим:

$$\omega = j^{1/4} \quad (29)$$

Действие (26) для замкнутого шнура $N = I$ может быть поэтому записано в форме:

$$\begin{aligned} W_{cs} &= \frac{E}{c} 4\pi^2 (\tau_1 - \tau_0) K^{-1} \left\{ j^{-1/2} C_1 + C_2 (K^2 - j^{1/2}) + \right. \\ &+ a^{-2} \left[j^{-1/2} K \pi^2 / 4 + \frac{3}{16} \pi^2 (K^2 - j^{1/2}) \right] + a^2 C_3 \left. \right\} = \\ &= \frac{E}{c} 4\pi^2 (\tau_1 - \tau_0) / \gamma_{cs} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \sin 2\pi \approx 6,15 \\ C_2 &= \frac{1}{2} \pi^2 + \sin 2\pi - \frac{1}{4} \sin 4\pi \approx 6,59 \\ C_3 &= \frac{1}{2} \pi^2 + \sin 4\pi \approx 8,05 \end{aligned} \quad (31)$$

где безразмерный интеграл $\mathcal{I}_{cs}$ есть масштаб энергии в замкнутом шнуре. $\mathcal{I}_{cs}$ может быть трактуем, как функция K и a и минимизованный в соответствии с этими переменными для некоторой величины γ . Минимум характеризуется функциями $K = K_0(\gamma)$ и $a = a_0(\gamma)$. Если C_{10} и K_0 найдены лежащими близко друг от друга, мы предположим $a = K_0$. Результирующий интеграл $\mathcal{I}_{cs}$ нанесён на фигуре 7. Кривая $\mathcal{I}_{cs}$ имеет минимум для $\gamma \approx 34$; соответствующая величина K_0 (и a_0) есть 1,43. Минимум величины интеграла есть $\mathcal{I}_{cs} = 4,16$. Должно быть подчеркнуто, тем не менее, что эти результаты представляют грубую аппроксимацию, которая более того пренебрегает влияниями конечной кривизны шнура. Поэтому, величины $\mathcal{I}_{cs}$, данные в фиг. 7, есть вероятно много выше. Может быть упомянутого здесь, что предположение $L = 1$ ведёт к сходным структурам и величины $\mathcal{I}_{cs}$, которые немного меньше чем при $L = 1$, даются на фиг. 7

е) Принцип действия (8) симметричен по отношению $\Theta = \pi$ и $\Theta = 0$, асимметрия появляется только при виртуальных граничных условиях $\Theta \rightarrow 0$ для $r \rightarrow \infty$. Это ведёт нас к подозрению, что решения могут существовать в каждой из этих симметричных областей. В (с) было обсуждено существование шнура $\Theta = 0$, проходящего через замкнутый

шнур $\Theta = \pi$ ($\mathcal{N} = 1$). Шнур $\Theta = 0$ или бесконечен по длине или замкнут таким образом как соединение при $\Theta = \pi$. Это свойство может быть описано с константой C , принимающей значения $C = 0$ и $C = 1$ соответственно. Две эти структуры показаны на фиг.6. Структура с $C = 1$ более тесно приближается к вышеупомянутой симметрии. Она описывается замкнутым шнуром Мёбуса с поворотом на 2π , имеющим шнуровые границы, определяемые уравнениями $\Theta = 0$ и $\Theta = \pi$.

ж) Далее обсуждение должно быть основано на статических функциях Θ и временной зависимости φ , заданной (24). Тем не менее временная зависимость Θ не исключена, и это может вести к отрицательному вкладу в величину $D(\alpha)$ и поэтому в интеграл. Временная зависимость Θ возможно возникает в течение вращения всей структуры $C = 1$ (фиг.6). Мы не можем оценить разницу в энергии между структурами $C = 0$ и $C = 1$, но вероятно, что для $C = 1$ интеграл $\mathcal{I}_{CS}$ значительно ниже, что связано с отрицательным вкладом Θ_z .

з) Если сделано предположение, что структура $C = 1$ устойчива, следует, что внешняя сторона сферы радиуса R содержит всю структуру обоих шнуров $\Theta = \pi$ и $\Theta = 0$, и когда $ED^2 \ll AD$, уравнение (13) сводится к:

$$\square \Theta \cong \Theta(\gamma^{1/2} - \omega^2). \quad (32)$$

Это получается, так как в этой внешней области φ принимает форму $\varphi = \text{const} + \omega t$. Для $\omega = \gamma^{1/4}$ (33)

(в единицах c/e) асимптотическое статическое решение

есть $\Theta \propto \frac{1}{r}$ (34)

Аргумент (2I) поэтому не применим здесь и для $C = I$.

$$\int \epsilon(r) r^2 dr \neq 0. \quad (35)$$

Таблица I

Элементы полевых структур в трёх измерениях

- U_i — дополнительное пространство 3-х измерений;
- K_i — постоянная описывающая анизотропию в U_i ;
- A, E — обменные постоянные;
- θ, φ — переменные скалярного поля, полярный и азимутальный угол в U_i
- ℓ — параметр длины, описывающий структуры;
- γ — безразмерный параметр;
- L — целый "индекс" прямого шнура;
- M — целое указывающее, "число оболочек";
- N — целое, указывающее число поворотов;
- C — постоянная, принимающая значения 0 или I;
- P — постоянная, принимающая значения $-I$ или $+I$, описывающая симметрию решения.

и) Для $N > I$ стабильность не очевидна, распад на простейшие структуры не исключён топологически. Таблица I суммирует различные параметры описанных структур. Структуры, описанные в последних разделах, не были, насколько мне известно, описаны ранее. В этих структурах реализован новый синтез между непрерывными свойствами поля (θ, φ) и дискретными свойствами $(N, M$ и т.д.).

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

До сих пор мы имели дело, главным образом, с геометрическими и топологическими свойствами модели, исключая постоянные A , K , E , C , которые с самого начала были введены, как физические константы. В этом разделе делается попытка физической интерпретации.

Главный результат заключается в том, что устойчивые структуры полевых конфигураций, как было найдено, непосредственно следуют из основополагающего принципа действия. Эти структуры соответствуют реальностям конечного дискретного действия, или энергии, локализованной в ограниченной области пространства трёх измерений.

Характеристические свойства модели: а) не имеет особенностей; все величины, характеризующие поле и плотность, остаются конечными. Целые числа, характеризующие (подобно N или M) структуры, оказываются естественным путём совместимы с классическими непрерывными полями; () устойчивость, во всяком случае для $N=M=1$, есть топологического типа.

(б) Описание Лоренцовски инвариантно, как это становится ясным из уравнения (9).

Эти свойства делают соблазнительным попытку идентифицировать эти структуры с элементарными частицами; тем не менее, в общем, это может оказаться трудной задачей, и мы ограничиваем сами себя обсуждением некоторых аргументов, которые могут дать вклад в такую идентификацию.

Идея заключается в том, что отдельные структуры, классифицируемые с помощью целых чисел L, N, M, C, P соответствуют отдельным свободным элементарным частицам таким образом, что полная энергия структуры представляет остаточную энергию частицы.

Энергия определяется как пространственно-подобная часть основного интеграла. При $\tau \equiv \frac{ct}{e}$ мы можем написать согласно (30)

$$W_{cf} = (t_1 - t_0) \frac{E}{c} 4\pi^2 \mathcal{Y}_{cf}(\tau, L, N, M, C) \quad (36)$$

Здесь мы рассматриваем $\mathcal{Y}_{cf}$ как точный результат интегрирования, основанного на временной зависимости поля Θ ($C = I$), а не как приближительная величина на фиг. 7, которая вероятно слишком завышена. Если мы согласимся с гипотезой, что две простейшие устойчивые структуры $L = 2^{12}$ $N = M = I$; $C = I$; $P = \pm I$ могут быть идентифицированы с электроном и позитроном, мы найдём,

$$\frac{E}{c} 4\pi^2 \mathcal{Y}_{cf}(\tau) = mc^2 \quad (37)$$

где m есть масса электрона.

Если далее предположено, что структура с " C " = I устойчива и $\omega = \tau^{1/4}$ [уравнение (33)] поле Θ спадает как $\frac{\hbar r_0}{r}$ для больших расстояний r , когда сопоставляется с радиусом шнура [уравнение (34)]. Плотность энергии в этой области тогда даётся выражением:

$$\frac{A \pi^2 r_0^2}{r^4} \quad (38)$$

так как членом, содержащим D^2 , можно пренебречь. Здесь r_0 есть длина, как это следует из точного решения в соответст-

вии с принципом минимума для $C = 1$, Длина K_0 есть вероятно много меньше, чем R_0 устойчивого радиуса шнура. Плотность энергии (38) идентифицируется с плотностью энергии

$$\frac{e^2}{r^4} \text{ электрического поля электрона в пределе } r \rightarrow \infty \text{ и}$$

$$\text{мы находим } e^2 = \pi^2 \hbar r_0^2 = \pi^2 E \gamma^{-1/2} r_0 / e^2 \quad (39)$$

где e есть элементарный заряд.

Если можно бы было в дальнейшем предположить, что окружность $2\pi R_0 = 2\pi K_0^{-1}$ устойчивого шнура эквивалентна комptonовской длине волны, мы получили бы:

$$\ell = \frac{K_0 \hbar}{mc} \quad (40)$$

Здесь снова K_0 рассматривается имеющим точную величину равновесного волнового числа, соответствующего собственному минимуму $\mathcal{Y}_{cr}$. В принципе мы можем определить E, ℓ, γ (или альтернативно A, K, E) из уравнений (37), (39) и (40).

Для E мы находим:

$$E = \hbar c K_0 (4\pi^2 \mathcal{Y}_{cr})^{-1} \quad (41)$$

Однако, так как мы не можем рассчитать K_0 , дальнейшее определение постоянных не представляется возможным на этой стадии. С другой стороны, может быть констатировано, что основной принцип действия есть правильно сформулированная научная проблема. Нахождение более точного решения, чем имеющегося здесь, должно быть поэтому возможным, если существуют достаточные средства расчётов. Мы ожидаем, что K_0 и $\mathcal{Y}_{cr}$ должны иметь по крайней мере на порядок меньшие величины, чем данные на фигуре в этой статье.

В заключение сделаем несколько более общих замечаний.

- 1) Главным свойством описанных полевых структур есть, что все их параметры квантованы, что есть прямое следствие нелинейности основных уравнений. Имеются квантовые свойства двух видов: безразмерные квантовые числа (целые, подобные $\mathcal{N}, M$) и квантовые физические свойства (подобно массе и заряду).

Мы поэтому верим, что дальнейшее квантование согласно правилам квантовой электродинамики не есть необходимо и даже бессмысленно. Модель в силу этого соответствует классической частице с квантовыми свойствами.

- 2) Представление о точной локализации частицы не имеет значения в этой модели. Оно может быть заменено утверждением, что главная часть энергии содержится в конечной области пространства.

- 3) Зеркальная симметрия существует между структурами.

$\mathcal{N} = M = C = 1$; $P = 1$ и $P = -1$ (электрон и позитрон), так что заряд описывается CP . Тщательная проверка показывает, что ансамбль двух частиц $P = 1$ и $P = -1$ не устойчив топологически и может аннигилировать. Это утверждение не верно для двух структур, обе из которых описываются $P = +1$ или $P = -1$.

- 4) Структуры с $\mathcal{N} > 1$ или $M > 1$ имеют более высокую энергию и возможно относятся к тяжёлым частицам.

- 5) Взаимодействие двух частиц не есть свободное свойство, поддающееся сложению. Грубо говоря, взаимодействие есть следствие сосуществования в пространстве двух структур, которые распространились на всё пространство.

- 6) Безразмерный параметр γ описывает свойства вакуума и не связан с особенностями полевой структуры. Тем не менее, сами структуры и интеграл $\mathcal{I}_{cf}$ зависят существенным образом от γ , то есть определяют относительные вклады в основной интеграл. Из уравнений (39) и (41) мы найдём отношение между γ и константой тонкой структуры α

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{4} \gamma^{-1/2} r_0^2 \ell^{-2} \kappa_0 \mathcal{I}_{cf}^{-1} \quad (42)$$

- 7) Описанные структуры могут рассматриваться, как имеющие протяжённый осциллятор угловой частоты $eR_0 = \frac{me^2}{\hbar}$, определённой выражением (40). Это "внутреннее движение" может относиться к спине частицы. Рассмотрение движущихся осцилляторов этой частоты было основой оригинальной работы де Бройля¹³, ведущей к квантовой механике.

Поэтому мы верим, что примирение настоящей модели с квантовой механикой позволит проверить, возможно ли с помощью линий де Бройля коснуться причинной интерпретации квантовой механики.¹³

В заключение мы можем сказать, что предложенная модель обнаруживает некоторые подающие надежды физические свойства: их действительность будет зависеть от точных величин безразмерных констант и отношений масс.

Примечание

При выводе асимптотического поведения (32) для Θ , членом порядка Θ^3 пренебрегли. Этот член есть того же самого порядка величины как $\Delta \Theta$ и пренебрежение им оправдывается. Если в основании принципа действия (12) D^2 заменяется на D^3 , соответствующий член в (32) имеет порядок Θ^5 , так что Θ тогда асимптотически уменьшается как ϵ/r . Эта модификация (12), тем не менее, не изменяет ни топологических свойств модели, ни стабильности шнура $\mathcal{N} = M = 1$. Физическая интерпретация остаётся таким образом неизменной. Асимптотическое поведение Θ для изменённого принципа действия будет изложено более детально в следующей статье. Один из результатов есть то, что при данном $C = 1$ "заряд" станет независимым от деталей внутренней структуры "частицы".

ЛИТЕРАТУРА

- 1) A. Einstein (А.Эйнштейн) и Л.Инфельд. Эволюция физики 284 (*P. Zsolnay* Вена, 1950).
- 2) Д.Л.Т. Андерсон и Г.Г.Деррик
J. Math. Phys. II 1336 (1970).
- 3) U.ENZ *Phys. Rev.* 134, 1392 (1963).
- 4) U.ENZ. *Helv. Phys. Acta* т.37, 245 (1964).
- 5) J.K. Perriny and T.H.R. Scypte *Nucl. Phys.* 31, 550 1962. Для расширения списка ссылок см. A.C. Scott, *Proc IEEE* 61, 1443 (1973).
- 6) N.J. Zabrucky and M.D. Krizkal, *Phys. Rev. Lett.* 15, 240 (1965).
- 7) G.H. Derrick, *J. Math. Phys.* 5, 1252 (1964).